

**А.П. Киселев
Н.А. Рыбкин**

ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

7•9 КЛАССЫ

Учебник и задачник



**Издательский
дом
'Дрофа'
1995**

Киселев А. П., Рыбкин Н. А.

**К44 Геометрия: Планиметрия: 7—9 кл.: Учебник и
задачник. — М.: Дрофа, 1995. — 352 с.: ил.**

ISBN 5—7107—0477—6

Учебник по геометрии известного русского педагога-математика А. П. Киселева выдержал более 40 изданий. Благодаря простоте изложения материала, продуманной методике, строгой научности, учебник необыкновенно популярен и заслужил признательность многих поколений школьников и учителей. Неоднократно переиздавался и задачник по геометрии Н. А. Рыбкина. Оба пособия и сегодня могут быть успешно использованы в общеобразовательных учебных заведениях разных типов и для самообразования.

Тексты с небольшими редакционными исправлениями печатаются по изданиям: *Киселев А. П. Геометрия: Ч. 1: Планиметрия.* — М.: Учпедгиз, 1961; *Рыбкин Н. А. Сборник задач по геометрии.* — М.: Просвещение, 1964.

ББК 22.151я72

© «Дрофа», 1995

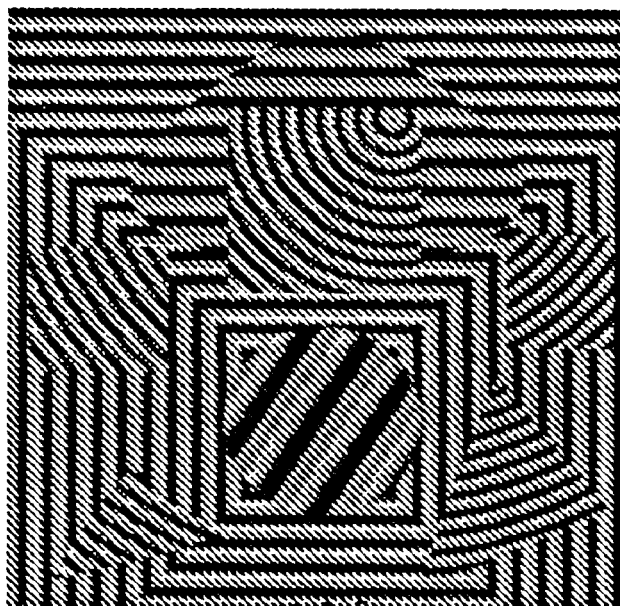
© Художественное оформление.

«Дрофа», 1995

А.П. Киселев **Геометрия**

ПЛАНИМЕТРИЯ

**Учебник
для 7-9 классов**



ВВЕДЕНИЕ

1. Геометрические фигуры. Часть пространства, ограниченная со всех сторон, называется геометрическим телом.

Геометрическое тело отделяется от окружающего пространства поверхностью.

Часть поверхности отделяется от смежной части линией.

Часть линии отделяется от смежной части точкой.

Геометрическое тело, поверхность, линия и точка не существуют раздельно. Однако при помощи отвлечения мы можем рассматривать поверхность независимо от геометрического тела, линию — независимо от поверхности и точку — независимо от линии. При этом поверхность мы должны представлять себе не имеющей толщины, линию — не имеющей ни толщины, ни ширины и точку — не имеющей ни длины, ни ширины, ни толщины.

Совокупность каких бы то ни было точек, линий, поверхностей или тел, расположенных известным образом в пространстве, называется вообще геометрической фигурой. Геометрические фигуры могут перемещаться в пространстве, не подвергаясь никаким изменениям. Две геометрические фигуры называются равными, если перемещением одной из них в пространстве ее можно совместить со второй фигурой так, что обе фигуры совместятся во всех своих частях.

2. Геометрия. Наука, рассматривающая свойства геометрических фигур, называется геометрией, что в переводе с греческого языка означает землемерие. Такое название этой науке было дано потому, что в древнее время главной целью геометрии было измерение расстояний и площадей на земной поверхности.

Плоскость

3. Плоскость. Из различных поверхностей наиболее знакомая нам есть плоская поверхность, или просто плос-

кость, представление о которой дает нам, например, поверхность хорошего оконного стекла или поверхность спокойной воды в пруде и т.п.

Укажем следующее свойство плоскости:

Всякую часть плоскости можно наложить всеми ее точками на другое место этой или другой плоскости, причем накладываемую часть можно предварительно перевернуть другой стороной.

Прямая линия

4. Прямая линия. Самой простой линией является прямая. Представление о прямой линии, или просто о прямой, всем хорошо знакомо. Представление о ней дает туго натянутая нить или луч света, выходящий из малого отверстия. С этим представлением согласуется следующее основное свойство прямой:

Через всякие две точки пространства можно провести прямую и притом только одну.

Из этого свойства следует:

Если две прямые наложены одна на другую так, что какие-нибудь две точки одной прямой совпадают с двумя точками другой прямой, то эти прямые сливаются и во всех остальных точках (потому что в противном случае через две точки можно было бы провести две различные прямые, что невозможно).

По той же причине две прямые могут пересечься только в одной точке.

Прямая линия может лежать на плоскости. При этом плоскость обладает следующим свойством:

Если на плоскости взять какие-нибудь две точки и провести через них прямую линию, то все точки этой прямой будут находиться в этой плоскости.

5. Неограниченная прямая; луч; отрезок. Если прямую представляют продолженной в обе стороны бесконечно, то ее называют бесконечной (или неограниченной) прямой.

Прямую обозначают обыкновенно двумя большими буквами, поставленными у двух каких-либо ее точек. Так, говорят: «прямая AB » или « BA » (рис. 1).

Часть прямой, ограниченная с обеих сторон, называется отрезком прямой; отрезок обыкновенно обозначается двумя буквами, поставленными у его концов (отрезок CD , рис. 2).

Иногда прямую или отрезок прямой обозначают и одной буквой (малой); например, говорят: «прямая a , отрезок b » и т.п.

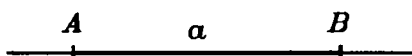


Рис. 1.

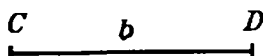


Рис. 2.

Для краткости вместо «отрезок прямой» мы будем часто говорить просто «отрезок».

Иногда рассматривают прямую, ограниченную только с одной стороны, например в точке A (рис. 3). О такой прямой говорят, что она исходит из точки A ; ее называют лучом (или полупрямой).



Рис. 3.

6. Равенство и неравенство отрезков. Два отрезка равны, если они могут быть наложены один на другой так, что их концы совпадут. Положим, например, что мы накладываем отрезок AB на отрезок CD (рис. 4) так, чтобы точка A совпала с точкой C и чтобы прямая AB пошла по прямой CD , если при этом концы B и D совпадут, то отрезки AB и CD равны; в противном случае отрезки будут не равны, причем меньшим считается тот, который составит часть другого.

Чтобы на какой-нибудь прямой отложить отрезок, равный данному отрезку, употребляют циркуль — прибор, известный учащимся из опыта.



Рис. 4.

7. Сумма отрезков. Суммой нескольких данных отрезков $AB, CD, EF, \dots$ (рис. 5) называется такой отрезок, который получится следующим образом.

На какой-нибудь прямой берем произвольную точку M и откладываем от нее отрезок MN , равный AB , затем от точки N в том же направлении откладываем отрезок NP , равный CD , и отрезок PQ , равный EF . Тогда отрезок MQ и будет суммой отрезков AB, CD и EF (которые по отношению к этой сумме называются слагаемыми). Подобным образом можно получить сумму какого угодно числа отрезков.

Сумма отрезков обладает всеми свойствами суммы чисел; так, она не зависит от порядка слагаемых (пере-

местительный закон) и не изменяется, если некоторые слагаемые будут заменены их суммой (сочетательный закон). Так:

$$AB+CD+EF=AB+EF+CD=EF+CD+AB=...$$

и

$$AB+CD+EF=AB+(CD+EF)=CD+(AB+EF)=...$$

8. Действия над отрезками. Из понятия о сумме выводятся понятия о разности отрезков, умножении и делении отрезков на отвлеченное число. Так, разность отрезков AB и CD (если $AB > CD$) есть такой третий отрезок, сумма которого с CD равна AB ; произведение отрезка AB на число 3 есть сумма трех отрезков, из которых каждый равен AB ; частное от деления отрезка AB на число 3 есть третья часть AB и т.п.

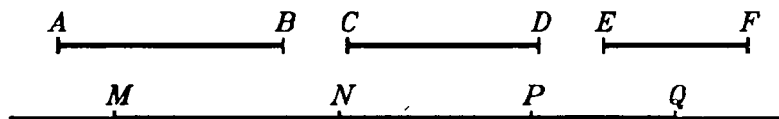


Рис. 5.

Если данные отрезки измерены какой-нибудь линейной единицей (например, сантиметром) и длины их выражены соответствующими числами, то длина суммы отрезков выразится суммой чисел, измеряющих эти отрезки, разность выразится разностью чисел и т.д.

Понятие об окружности

9. Окружность. Если дадим циркулю произвольный расстор и, поставив одну его ножку острием в какую-нибудь точку O плоскости (рис. 6), станем вращать циркуль вокруг этой точки, то другая его ножка, снабженная карандашом или пером, прикасающимся к плоскости, опишет на плоскости непрерывную линию, все точки которой одинаково удалены от точки O . Эта линия называется **окружностью**, а точка O — **центром** ее. Отрезки OA , OB , OC , ..., соединяющие центр с какими-нибудь точками окружности, называются **радиусами**. Все радиусы одной окружности равны между собой.

Окружности, описанные одинаковыми радиусами, равны, так как они при совмещении их центров совмещаются всеми своими точками.

Прямая (MN , рис. 6), проходящая через какие-нибудь две точки окружности, называется **секущей**.

Отрезок прямой (EF), соединяющий две какие-нибудь точки окружности, называется хордой.

Всякая хорда (AD), проходящая через центр, называется диаметром.

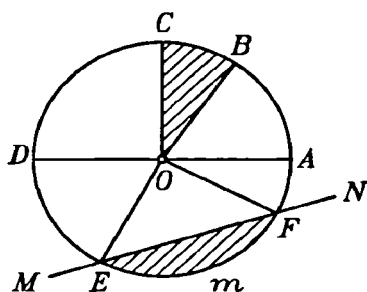


Рис. 6.

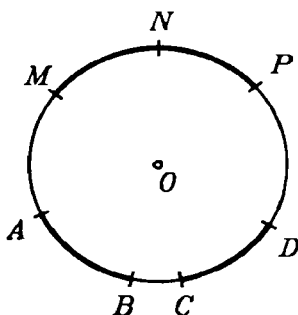


Рис. 7.

Диаметр равен сумме двух радиусов, и потому все диаметры одной окружности равны между собой.

Какая-нибудь часть окружности (например, EmF) называется дугой.

О хорде (EF), соединяющей концы какой-нибудь дуги, говорят, что она стягивает эту дугу.

Дуга обозначается иногда знаком $\cup$; например, пишут так: $\cup EmF$.

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется кругом¹.

Часть круга, заключенная между двумя радиусами (часть COB , покрытая штрихами на рис. 6), называется сектором, а часть, отсекаемая от круга какой-нибудь секущей (часть EmF), называется сегментом.

10. Равенство и неравенство дуг. Две дуги одной и той же окружности (или равных окружностей) равны между собой, если они могут быть совмещены так, что их концы совпадут. Положим, например, что мы накладываем дугу AB (рис. 7) на дугу CD так, чтобы точка A совпала с точкой C и дуга AB пошла по дуге CD ; если при этом концы B и D совпадут, то совпадут и все промежуточные точки этих дуг, так как они находятся на одинаковом расстоянии от центра, зна-

¹ Иногда слово «круг» употребляют в том же смысле, как и окружность. Но этого следует избегать, так как употребление одного и того же термина для разных понятий может приводить к ошибкам.

чит, $\cup AB = \cup CD$; если же B и D не совпадут, то дуги не равны, причем та считается меньше, которая составит часть другой.

11. Сумма дуг. Суммой нескольких данных дуг одинакового радиуса называется такая дуга того же радиуса, которая составлена из частей, соответственно равных данным дугам. Так, если от произвольной точки M (рис. 7) окружности отложим часть MN , равную AB , и затем от точки N в том же направлении отложим часть NP , равную CD , то дуга MP будет суммой дуг AB и CD . Подобно этому можно составить сумму трех и более дуг.

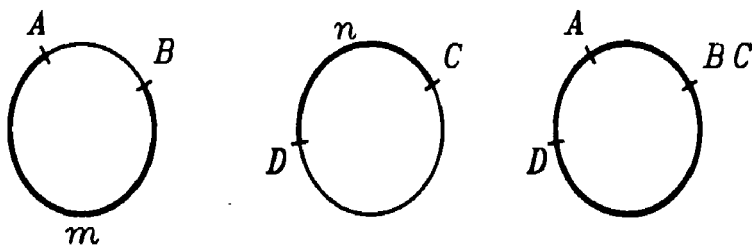


Рис. 8.

При сложении дуг одинакового радиуса их сумма может не уместиться на одной окружности, одна из дуг может частично покрыть другую. В таком случае суммой дуг будет являться дуга, бóльшая целой окружности. Так, например, при сложении дуги AmB с дугой CnD (рис. 8) получаем дугу, состоящую из целой окружности и дуги AD .

Сумма дуг, как и сумма отрезков прямой, обладает свойствами **переместительным** и **сочетательным**.

Из понятия о сумме дуг выводятся понятия о разности дуг, умножении и делении дуги на отвлеченное число, так же как и для отрезков прямых.

12. Разделение геометрии. Геометрия разделяется на две части: **планиметрию** и **стереометрию**. Первая рассматривает свойства таких фигур, все части которых помещаются на одной плоскости.

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

I. УГЛЫ

Предварительные понятия

13. Угол. Фигура, образованная двумя лучами (OA и OB , рис. 9), исходящими из одной точки, называется углом. Полупрямые, образующие угол, называются сторонами, а точка, из которой они исходят, — вершиной угла. Стороны следует представлять себе неограниченно продолженными от вершины.

Угол обыкновенно обозначается тремя большими буквами, из которых средняя ставится у вершины, а крайние — у каких-нибудь точек сторон; например, говорят: «угол AOB » или «угол BOA » (рис. 9). Но можно обозначить угол и одной буквой, поставленной у вершины, если при этой вершине нет других углов. Мы иногда будем обозначать угол цифрой, поставленной внутри угла около вершины.

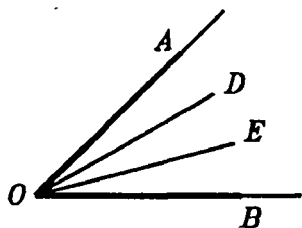


Рис. 9.

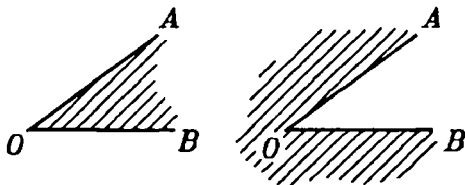


Рис. 10.

Стороны угла разделяют всю плоскость, в которой лежит этот угол, на две области. Одна из них называется внутренней областью угла, другая — внешней его областью. Обычно внутренней областью считается та, в которой целиком помещается отрезок прямой, соединяющей две любые точки, взятые на сторонах угла, например точки A и B на сторонах угла AOB (рис. 9). Но иногда приходится считать внутренней областью угла другую часть плоскости. В этих

случаях обычно делается специальное указание, какая область плоскости считается внутренней областью угла.

На рисунке 10 представлены раздельно оба случая. Внутренней областью угла в каждом случае служит заштрихованная часть плоскости.

Если из вершины угла (рис. 9) проведем внутри него какие-нибудь прямые OD , OE , ... , то образовавшиеся при этом углы AOD , DOE , EOB , ... рассматриваются как части угла AOB .

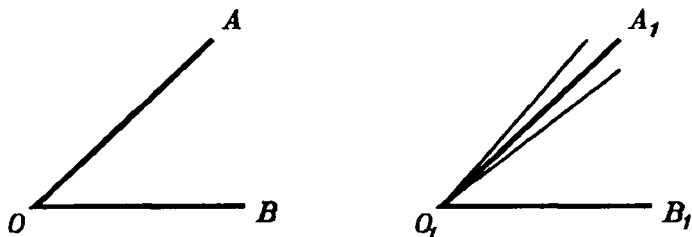


Рис. 11.

Слово «угол» при записи заменяется часто знаком $\angle$.

Например, вместо «угол AOB » обычно пишут: $\angle AOB$.

14. Равенство и неравенство углов. В соответствии с общим определением равенства геометрических фигур (§1) *два угла считаются равными, если при наложении они могут совместиться*. Положим, например, что мы накладываем угол AOB на угол $A_1O_1B_1$ (рис. 11) так, чтобы вершина O совпала с O_1 , сторона OB пошла по O_1B_1 и чтобы внутренние области обоих углов были расположены по одну сторону от

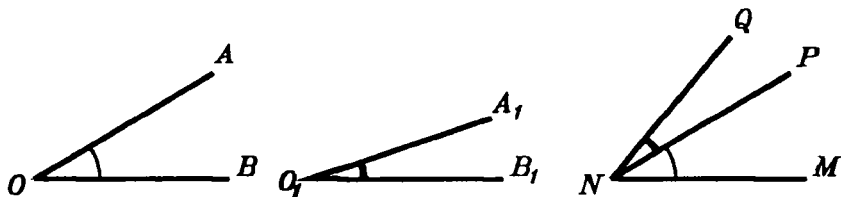


Рис. 12.

прямой O_1B_1 . Если при этом сторона OA совместится с O_1A_1 , то углы равны; если же OA пойдет внутри угла $A_1O_1B_1$ или же вне его, то углы не равны, причем тот из них будет меньше, который составит часть другого угла.

15. Сумма углов. Суммой углов AOB и $A_1O_1B_1$ (рис. 12) называется такой угол, который получится следующим образом. Строим угол MNP , равный первому данному углу AOB ,

и к нему пристраиваем угол PNQ , равный другому данному углу $A_1O_1B_1$, так, чтобы у обоих углов оказалась общая вершина N и общая сторона NP и чтобы внутренние области углов были расположены по разные стороны от общей стороны NP . Тогда угол MNQ называется суммой углов AOB и $A_1O_1B_1$. Внутренней областью этого угла служит та область плоскости, которая образована совокупностью внутренних областей складываемых углов. Это та область, в которой лежит общая сторона (NP) складываемых углов. Подобным образом может быть составлена сумма трех и более углов.

Сумма углов, как и сумма отрезков прямой, обладает свойствами переместительным и сочетательным.

Часто приходится говорить о такой полупрямой, которая делит данный угол пополам; такой полупрямой дали особое название: **биссектриса** (или **равноделящая**) (рис. 13).

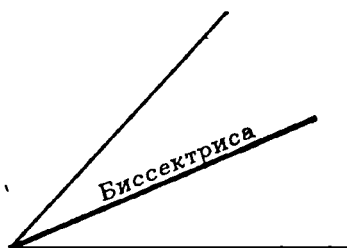


Рис. 13.

16. Расширение понятия об угле. При нахождении суммы углов могут представиться некоторые особые случаи, которые полезно рассмотреть отдельно.

1. Может случиться, что после сложения нескольких углов, например трех: AOB , BOC

и COD (рис. 14), сторона OD угла COD составит продолжение стороны OA угла AOB . Мы получим тогда фигуру, образованную двумя полупрямыми (OA и OD), исходящими из одной точки (O) и составляющими продолжение одна другой. Такую фигуру принято тоже называть углом (**развернутым**, или **выпрямленным**).

2. Может случиться, что после сложения нескольких углов, например пяти углов: AOB , BOC , COD , DOE и EOA (рис. 15), сторона OA угла EOA совместится со стороной OA угла AOB .

Фигура, образованная такими полупрямыми (рассматриваемая вместе со всей плоскостью, расположенной кругом общей вершины O), также называется углом (**полным**).

3. Наконец, может случиться, что, строя сумму углов, мы не только заполним всю плоскость вокруг их общей вершины, но даже будем вынуждены налагать углы один на

другой, покрывая плоскость вокруг общей вершины во второй раз, в третий раз и т. д. Такая сумма углов равна одному

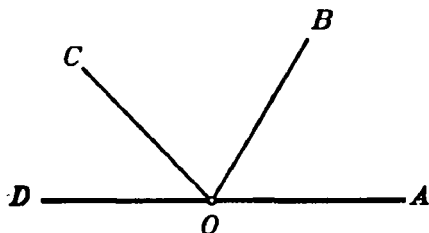


Рис. 14.

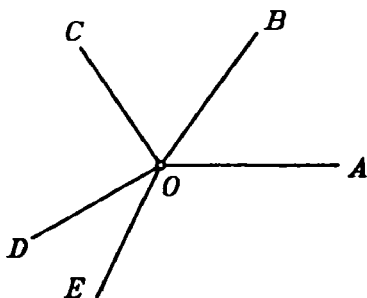


Рис. 15.

полному углу, сложенному с некоторым углом, или равна двум полным углам, сложенным с некоторым углом, и т.д.

Измерение углов

17. Центральный угол. Угол (AOB , рис. 16), образованный двумя радиусами окружности, называется **центральный** углом; о таком угле и дуге, заключенной между его сторонами, говорят, что они **соответствуют** друг другу.

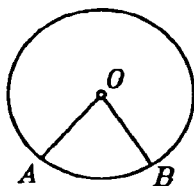


Рис. 16.

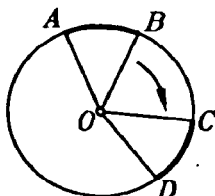


Рис. 17.

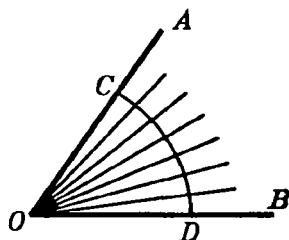


Рис. 18.

Центральные углы по отношению к соответствующим им дугам обладают следующими двумя свойствами:

В одном круге или в равных кругах:

1) Если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны.

2) Обратно. Если дуги равны, то и соответствующие им центральные углы равны.

Пусть $\angle AOB = \angle COD$ (рис. 17), покажем, что дуги AB и CD тоже равны. Вообразим, что сектор AOB мы повернули вокруг центра O в направлении, указанном стрелкой, настолько, чтобы радиус OA совпал с OC . Тогда, вследствие равенства углов, радиус OB совместится с OD : значит, совместятся и дуги AB и CD , т.е. они будут равны.

Второе свойство также легко обнаружить наложением.

18. Градусы дуговой и угловой. Вообразим, что какая-нибудь окружность разделена на 360 равных частей и ко всем точкам деления проведены радиусы. Тогда вокруг центра образуются 360 центральных углов, которые, как соответствующие равным дугам, должны быть равны между собой. Каждая из полученных таким образом на окружности дуг называется **дуговым градусом**, а каждый из образовавшихся при центре углов называется **угловым градусом**. Значит, можно сказать, что дуговой градус есть $\frac{1}{360}$ часть окружности, а угловой градус есть центральный угол, соответствующий дуговому градусу.

Градусы (дуговые и угловые) подразделяются еще на 60 равных частей, называемых **минутами**, а минуты подразделяются еще на 60 равных частей, называемых **секундами**¹.

19. Соответствие между центральными углами и дугами. Пусть AOB есть какой-нибудь угол (рис. 18). Опишем между его сторонами с центром в вершине O дугу CD произвольного радиуса; тогда угол AOB будет центральным углом, соответствующим дуге CD .

Положим, например, что в этой дуге содержится 7 дуговых градусов (на рисунке градусы изображены в увеличенном размере). Тогда, если соединим точки деления с центром, угол AOB разделится, очевидно, на 7 угловых градусов. Вообще можно сказать, что *угол измеряется соответствующей ему дугой*, разумея под этим, что в угле содержится столько угловых градусов, минут и секунд, сколько в соответствующей ему дуге содержится дуговых градусов, минут и секунд. Если, например, в дуге CD содержится 20 градусов 10 минут 15 секунд дуговых, то и в угле AOB заключается 20 градусов 10 минут 15 секунд угловых, что принято сокращенно выражать так: $\angle AOB = 20^\circ 10' 15''$, обозначая знаками $^\circ$, $'$ и $''$ соответственно градусы, минуты и секунды.

¹ Употребительна также сотенная система мер углов и дуг; по этой системе за один град дуги принимают $\frac{1}{100}$ четверти окружности, минуту принимают равной $\frac{1}{100}$ града, секунду — $\frac{1}{100}$ минуты.

Величина углового градуса не зависит от радиуса окружности. Действительно, если сложить по правилу, указанному в § 15, 360 угловых градусов, то получим полный угол при центре окружности. Каков бы ни был радиус окружности, этот полный угол будет один и тот же. Значит, можно сказать, что угловой градус составляет $\frac{1}{360}$ часть полного угла. Это — мера угла, вполне определяющая его величину независимо от радиуса окружности. Число угловых градусов в данном угле принимают за меру наклона одной стороны угла к другой.

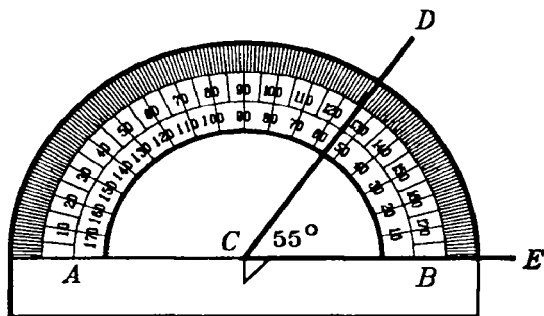


Рис. 19.

20. Транспортир. Для измерения углов применяется особый прибор — транспортир. Этот прибор (рис. 19) представляет собой полукруг, дуга которого разделена на 180° . Чтобы измерить угол DCE , накладывают на него прибор так, чтобы центр полукруга совпадал с вершиной угла, а радиус CB был расположен по стороне CE . Тогда число градусов, содержащееся в дуге, заключенной между сторонами угла DCE , покажет величину его. При помощи транспортира можно также начертить угол, содержащий данное число градусов.



Рис. 20.

21. Прямой, острый и тупой углы. Угол в 90° (составляющий, следовательно, половину развернутого угла

или четверть полного угла) называют **прямым углом**; угол, меньший прямого, называют **острым**, а угол, больший прямого, но меньший развернутого, называют **тупым** (рис. 20).

Конечно, *все прямые углы*, как содержащие одинаковое число градусов, *равны между собой*.

Величину прямого угла иногда обозначают буквой d (начальная буква французского слова *droit*, что значит «прямой»).

Смежные и вертикальные углы

22. Смежные углы и их свойства. Два угла (AOB и BOC , рис. 21) называются **смежными**, если одна сторона у них общая, а две другие составляют продолжение одна другой.

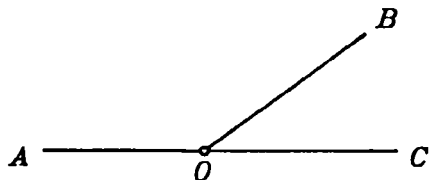


Рис. 21.

Так как такие углы в сумме составляют развернутый угол, то **сумма двух смежных углов равна 180°** (другими словами, она равна сумме двух прямых углов).

Для каждого данного угла можно построить два смежных с ним угла. Например, для угла AOB (рис. 22), продолжив сторону AO , мы получим один смежный угол BOC , а продолжив сторону BO , получим другой смежный угол AOD .

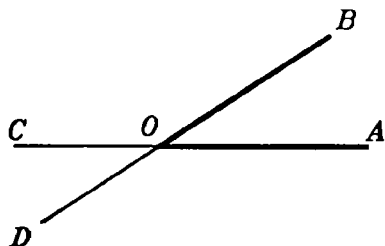


Рис. 22.

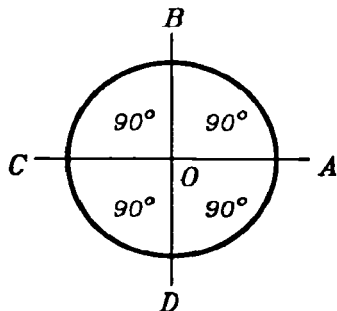


Рис. 23.

Два угла, BOC и AOD , смежные с одним и тем же углом AOB , равны между собой, так как каждый из них дополняет угол AOB до 180° .

Если угол AOB прямой (рис. 23), т.е. если он содержит 90° , то и каждый из смежных с ним углов COB и AOD должен быть также прямой, так как он содержит в себе $180^\circ - 90^\circ$, т.е. 90° ; четвертый угол COD тоже должен быть прямым, так как три угла AOB , BOC и AOD составляют в сумме 270° , и, следовательно, от 360° на долю четвертого угла COD остается тоже 90° . Таким образом: *если при пересечении двух прямых (AC и BD , рис. 23) один из четырех углов окажется прямой, то и остальные три угла должны быть прямыми.*

23. Перпендикуляр и наклонная. Общая сторона (OB) двух смежных углов называется **наклонной** к прямой (AC), на которой лежат две другие стороны, в том случае, когда смежные углы не равны между собой (рис. 24); в том же случае, когда смежные углы равны (рис. 25) и когда, следовательно, каждый из углов есть прямой, общая сторона называется **перпендикуляром** к прямой, на которой лежат две другие стороны. Общая вершина (O) в первом случае называется **основанием наклонной**, во втором случае — **основанием перпендикуляра**.

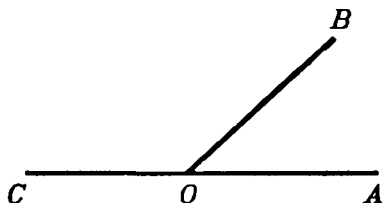


Рис. 24.

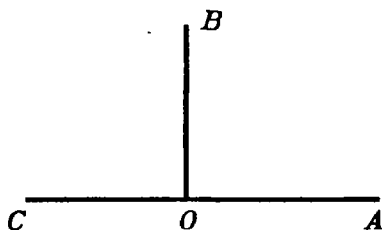


Рис. 25.

Две прямые (AC и BD , рис. 23), пересекающиеся между собой под прямым углом, называются **взаимно перпендикулярными**. Что прямая AC перпендикулярна к прямой BD , записывают так: $AC \perp BD$.

Замечания. 1) Если перпендикуляр к прямой AC (рис. 25) приходится проводить из точки O , лежащей на этой прямой, то говорят, что этот перпендикуляр надо «восставить» к прямой AC , а если требуется перпендикуляр провести из точки B , лежащей вне прямой, то говорят, что его надо «опустить» на прямую (все равно: вниз, или вверх, или вбок).

2) Очевидно, что из всякой точки данной прямой можно к этой прямой восставить перпендикуляр и притом только один.

24. Докажем, что из всякой точки, лежащей вне прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр и только один.

Пусть дана какая-нибудь прямая AB (рис. 26) и вне ее произвольная точка M ; требуется показать, что, во-первых, из этой точки можно опустить на прямую AB перпендикуляр и, во-вторых, что этот перпендикуляр может быть только один.

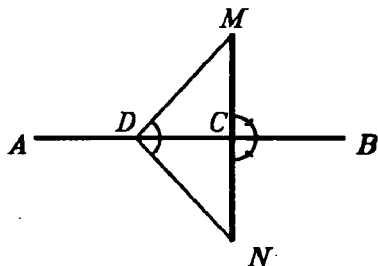


Рис. 26.

Вообразим, что мы перегнули чертеж по прямой AB так, чтобы верхняя его часть упала на нижнюю. Тогда точка M займет некоторое положение N . Отметив это положение, приведем чертеж в прежний вид и затем соединим точки M и N прямой. Теперь убедимся, что полученная прямая MN перпендикулярна к AB , а всякая иная прямая, исхо-

дящая из M , например MD , не перпендикулярна к AB . Для этого перегнем чертеж вторично. Точка M снова совместится с N , а точки C и D останутся на своих местах; следовательно, прямая MC совпадет с NC , а MD с ND . Из этого следует, что $\angle MCB = \angle BCN$ и $\angle MDC = \angle CDN$. Но углы MCB и BCN смежные и, как теперь видим, равные; следовательно, каждый из них есть прямой, а потому $MN \perp AB$. Так как линия MDN не прямая (потому что не может быть двух различных прямых, соединяющих точки M и N), то сумма двух равных углов MDC и CDN не равна $2d$; поэтому угол MDC не есть прямой, и значит, MD не перпендикулярна к AB . Таким образом, другого перпендикуляра из точки M на прямую AB опустить нельзя.

25. Чертежный треугольник. Для построения перпендикуляра к данной прямой очень удобен чертежный треугольник, у которого один из углов делается прямым. Чтобы провести перпендикуляр к прямой AB (рис. 27) через точку C , лежащую на этой прямой, или через точку D , взятую вне прямой, приставляют линейку к прямой AB и к линейке треугольник, а затем, придерживая линейку рукой, двигают треугольник вдоль линейки до тех пор, пока другая сторона прямого угла не пройдет через точку C или D , затем проводят прямую CE .

26. Вертикальные углы и их свойство. Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного составляют продолжение сторон другого. Так, при пересечении двух прямых AB и CD (рис. 28) образуются две пары вертикальных углов: AOD и COB , AOC и DOB (и четыре пары смежных углов).

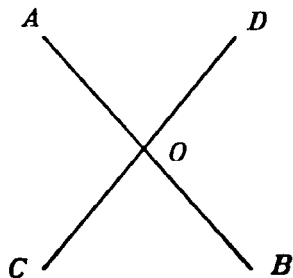


Рис. 28.

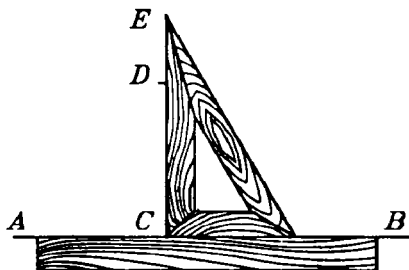


Рис. 27.

Два вертикальных угла равны между собой (например, $\angle AOD = \angle COB$), так как каждый из них есть смежный с одним и тем же углом (с $\angle DOB$ или с $\angle AOC$), а такие углы, как мы видели (§ 22), равны друг другу.

27. Замечания об углах, имеющих общую вершину. Об углах, имеющих общую вершину, полезно помнить следующие простые истины:

1) Если сумма нескольких углов (AOB , BOC , COD , DOE , рис. 29), имеющих общую вершину, составляет развернутый угол, то она равна $2d$, т. е. 180° .

2) Если сумма нескольких углов (AOB , BOC , COD , DOE , EOA , рис. 30), имеющих общую вершину, составляет полный угол, то она равна $4d$, т. е. 360° .

3) Если два угла (AOB и BOC , рис. 24) имеют общую вершину (O) и общую сторону (OB) и в сумме составляют $2d$ (т. е. 180°), то их две другие стороны (AO и OC) составляют продолжение одна другой (т. е. такие углы будут смежные).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Некоторый угол равен $38^\circ 20'$; найти величину смежного с ним угла.

2. Два угла ABC и CBD , имея общую вершину B и общую сторону BC , расположены так, что они не покрывают

друг друга; угол $ABC=100^{\circ}20'$, а угол $CBD=79^{\circ}40'$. Составляют ли стороны AB и BD прямую или ломаную?

3. Построить какой-нибудь угол и при помощи транспортира и линейки провести его биссектрису.

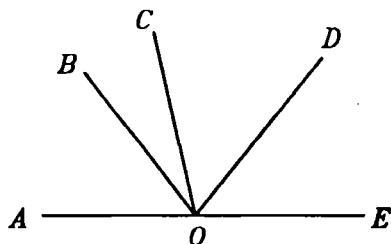


Рис. 29.

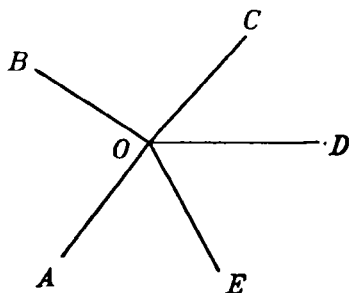


Рис. 30.

Доказать, что:

4. Биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны.

5. Биссектрисы двух вертикальных углов составляют продолжение одна другой.

6. Если при точке O прямой AB (рис. 28) построим по разные стороны от AB равные углы AOD и BOC , то стороны их OD и OC составляют одну прямую.

7. Если из точки O (рис. 28) проведем полупрямые OA , OD , OB , OC так, что $\angle AOC = \angle DOB$ и $\angle AOD = \angle COB$, то OB есть продолжение OA и OD есть продолжение OC .

Указание. Надо применить § 27, 2 и 3.

II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

28. Теоремы, аксиомы, определения. Из того, что было изложено, можно заключить, что некоторые геометрические истины мы считаем вполне очевидными (например, свойства плоскости и прямой в § 3 и 4), а другие устанавливаются путем рассуждений (например, свойства смежных углов в § 22 и вертикальных в § 26). Такие рассуждения являются в геометрии главным средством обнаружить свойства геометрических фигур. Поэтому для дальнейшего полезно заранее познакомиться с теми видами рассуждений, которые применяются в геометрии. Все истины, которые устанавливаются в геометрии, выражаются в виде предложений.

Эти предложения бывают следующих видов.

Определения. Определениями называют предложения, в которых разъясняется, какой смысл придают тому или другому названию или выражению. Например, мы уже встречали определения центрального угла, прямого угла, перпендикуляра и пр.

Аксиомы. Аксиомами называют истины, которые принимаются без доказательства. Таковы, например, предложения, встречавшиеся нам ранее (§ 4): через всякие две точки можно провести прямую и притом только одну; если две точки прямой лежат в данной плоскости, то и все точки этой прямой лежат в той же плоскости.

Укажем еще следующие аксиомы, относящиеся ко всякого рода величинам:

если две величины равны порознь одной и той же третьей величине, то они равны и между собой;

если к равным величинам прибавим поровну или от равных величин отнимем поровну, то равенство не нарушится;

если к неравным величинам прибавим поровну или от неравных величин отнимем поровну, то смысл неравенства не изменится, т. е. большая величина останется большей.

Теоремы. Теоремами называются предложения, истинность которых обнаруживается только после некоторого рассуждения (доказательства). Примером могут служить следующие предложения:

если в одном круге или в равных кругах центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны;

если при пересечении двух прямых между собой один из четырех углов окажется прямой, то и остальные три угла прямые, и прочие.

Следствия. Следствиями называются предложения, которые составляют непосредственный вывод из аксиомы или из теоремы. Например, из аксиомы: «через две точки можно провести только одну прямую», следует, что «две прямые могут пересечься только в одной точке».

29. Состав теоремы. Во всякой теореме можно различить две части: условие и заключение. Условие выражает то, что предполагается данным, заключение — то, что требуется доказать. Например, в теореме: «если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны», условием служит первая часть теоремы: «если центральные углы равны», а за-

ключением — вторая часть: «то и соответствующие им дуги равны»; другими словами, нам дано (нам известно), что центральные углы равны, а требуется доказать, что при этом условии и соответствующие дуги также равны.

Условие и заключение теоремы могут иногда состоять из нескольких отдельных условий и заключений; например, в теореме: «если число делится на 2 и на 3, то оно разделится и на 6», условие состоит из двух частей: «если число делится на 2» и «если число делится на 3».

Полезно заметить, что всякую теорему можно подробно выразить словами так, что ее условие будет начинаться словом «если», а заключение — словом «то». Например, теорему «вертикальные углы равны», можно подробнее высказать так: «если два угла вертикальные, то они равны».

30. Обратная теорема. Теоремой, обратной данной теореме, называется такая, в которой условием поставлено заключение (или часть заключения), а заключением — условие (или часть условия) данной теоремы. Например, следующие две теоремы обратны друг другу:

Если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны.

Если дуги равны, то и соответствующие им центральные углы равны.

Если одну из этих теорем назовем прямой, то другую следует назвать обратной.

В этом примере обе теоремы, и прямая и обратная, оказываются верными. Но так бывает не всегда. Например, теорема: «если два угла вертикальные, то они равны», верна, но обратное предложение: «если два угла равны, то они вертикальные», неверно.

В самом деле, допустим, что в каком-либо углу проведена его биссектриса (рис. 13). Она разделит данный угол на два меньших угла. Эти углы будут равны между собой, но они не будут вертикальными.

31. Противоположная теорема. Теоремой, противоположной данной теореме, называется такая, условие и заключение которой представляют отрицание условия и заключения данной теоремы. Например, теореме: «если сумма цифр делится на 9, то число делится на 9», соответствует такая противоположная: «если сумма цифр не делится на 9, то число не делится на 9».

И здесь должно заметить, что верность прямой теоремы еще не служит доказательством верности противоположной: например, противоположное предложение: «если каждое слагаемое *не* делится на одно и то же число, то и сумма *не* делится на это число» — неверно, тогда как прямое предложение верно.

32. Зависимость между теоремами: прямой, обратной и противоположной. Для лучшего уяснения этой зависимости выразим теоремы сокращенно так (буквой *A* мы обозначим условие теоремы, а буквой *B* — ее заключение):

- 1) Прямая: если есть *A*, то есть и *B*.
- 2) Обратная: если есть *B*, то есть и *A*.
- 3) Противоположная прямой: если нет *A*, то нет и *B*.
- 4) Противоположная обратной: если нет *B*, то нет и *A*.

Рассматривая эти предложения, легко заметить, что первое из них находится в таком же отношении к четвертому, как второе к третьему, а именно: предложения первое и четвертое обратимы одно в другое, равно как и второе и третье. Действительно, из предложения: «если есть *A*, то есть и *B*» непосредственно следует: «если нет *B*, то нет и *A*» (так как если бы *A* было, то, согласно первому предложению, было бы и *B*); обратно, из предложения: «если нет *B*, то нет и *A*», выводим: «если есть *A*, то есть и *B*» (так как если бы *B* не было, то не было бы и *A*). Совершенно так же убедимся, что из второго предложения следует третье, и наоборот.

Таким образом, чтобы иметь уверенность в справедливости всех четырех теорем, нет надобности доказывать каждую из них отдельно, а достаточно ограничиться доказательством только двух: прямой и обратной, или прямой и противоположной.

III. ТРЕУГОЛЬНИКИ

Понятие о многоугольнике и треугольнике

33. Ломаная линия. Линия, образуемая отрезками прямых, не лежащих на одной прямой и расположенных так, что конец первого служит началом второго, конец второго — началом третьего и т.д., называется **ломаной линией** (рис. 31 и 32). Эти отрезки называются **сторонами** ломаной, а вершины углов, образуемых соседними отрезками, — **вершинами** ее. Ломаная линия обозначается рядом букв, поставленных у ее вершин и концов; например говорят: ломаная *ABCDE*.

Ломаная линия называется **выпуклой**, если она вся расположена по одну сторону от каждого входящего в ее

состав отрезка, продолженного неограниченно в обе стороны. Такова, например, линия, изображенная на рисунке 31, тогда как ломаная рисунка 32 не будет выпуклой (она расположена не по одну сторону от прямой BC).

Когда концы ломаной сходятся в одну точку, то она называется замкнутой (например, линия $ABCDEA$ на рис. 33).

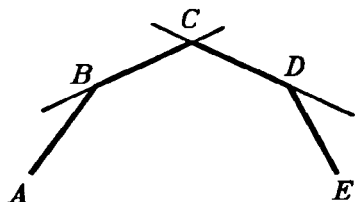


Рис. 31.

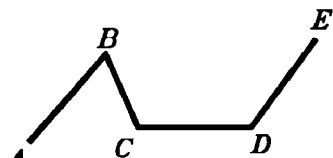


Рис. 32.

34. Многоугольник. Фигура, образованная замкнутой ломаной линией вместе с частью плоскости, ограниченной этой линией, называется многоугольником (рис. 33). Стороны этой ломаной называются сторонами многоугольника, углы, составленные каждым из двух соседних сторон, — углами многоугольника, а их вершины — вершинами его.

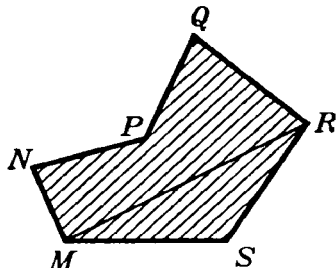
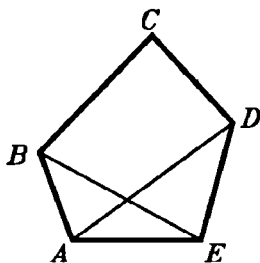


Рис. 33.

При этом внутренней областью угла многоугольника считается та, к которой принадлежит непосредственно прилегающая к вершине внутренняя область самого многоугольника. Так, для многоугольника $MNPQRS$ (рис. 33) углом при вершине P является угол, больший двух прямых (с заштрихованной внутренней областью). Сама ломаная линия, ограничивающая многоугольник, называется контуром его, а отрезок, равный сумме всех его сторон, — периметром.

Многоугольник называется выпуклым, если он ограничен выпуклой ломаной линией; таков, например, многоугольник $ABCDE$, изображенный на рисунке 33 (много-

угольник $MNPQRS$ нельзя назвать выпуклым); мы будем рассматривать главным образом выпуклые многоугольники.

Всякая прямая (как AD , BE , MR , ..., рис. 33), которая соединяет вершины двух углов многоугольника, не принадлежащих к одной стороне, называется диагональю многоугольника.

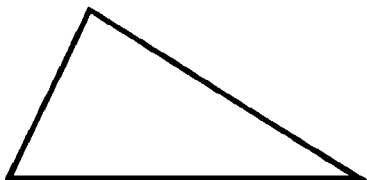


Рис. 34.

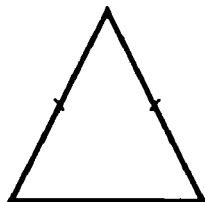


Рис. 35.

Наименьшее число сторон в многоугольнике три. По числу сторон многоугольник называется треугольником, четырехугольником, пятиугольником и т. д.

Для краткости «треугольник» обозначается символом Δ .

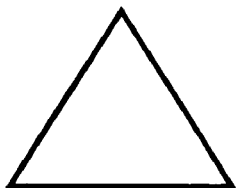


Рис. 36.

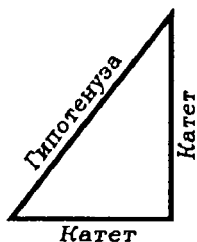


Рис. 37.

35. Разделение треугольников. Треугольники разделяются по сравнительной длине их сторон или по величине их углов. Относительно длины сторон они бывают: **разносторонние** (рис. 34), когда все стороны различной длины, и **равнобедренные** (рис. 35), когда две стороны одинаковы; в частности, равнобедренный треугольник называется **равносторонним** (рис. 36), когда все три его стороны равны между собой.

Относительно величины углов треугольники бывают: **остроугольные** (рис. 34), когда все углы острые, **прямоугольные** (рис. 37), когда в числе углов есть прямой, и **тупоугольные** (рис. 38), когда в числе углов есть тупой.

В прямоугольном треугольнике стороны, образующие прямой угол, называются катетами, а сторона, лежащая против прямого угла, — гипотенузой.

36. Главнейшие линии в треугольнике. Одну из сторон треугольника иногда называют основанием, тогда вершину противоположного угла называют вершиной треугольника, а перпендикуляр, опущенный из вершины на основание или на его продолжение, — высотой его. Так, если в $\triangle ABC$ (рис. 39 и 39,а) за основание взята сторона AC , то B будет вершина, BD — высота треугольника.

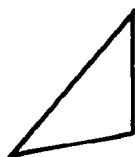


Рис. 38.

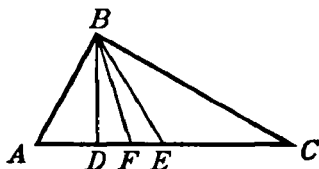


Рис. 39.

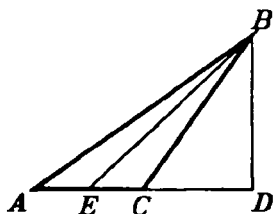


Рис. 39,а.

В равнобедренном треугольнике основанием называют обыкновенно ту сторону, которая не принадлежит к равным; тогда вершина равнобедренного треугольника будет вершиной того угла его, который образован равными сторонами.

Отрезок BE (рис. 39 и 39,а), соединяющий вершину какого-нибудь угла треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой. Отрезок прямой BF (рис. 39), делящий какой-нибудь угол треугольника пополам, называется равноделящей угла треугольника или его биссектрисой (биссектриса, вообще говоря, не совпадает ни с медианой, ни с высотой). Из вершины каждого угла треугольника можно опустить перпендикуляр на противоположную сторону или ее продолжение; следовательно, каждый треугольник имеет три высоты.

Вершину каждого угла треугольника можно соединить прямой с серединой противоположной стороны, следовательно, каждый треугольник имеет три медианы.

Точно так же ясно, что каждый треугольник имеет три биссектрисы.

Симметрия геометрических фигур относительно оси

37. При изучении свойств треугольников, многоугольников и других геометрических фигур часто встречается случай особого расположения на плоскости двух равных фигур, или двух равных отрезков, или двух точек по отношению к какой-либо прямой. Если какие-нибудь две точки A и A' (рис. 40) расположены по разные стороны от прямой MN на одном и том же перпендикуляре к этой прямой и на одинаковом расстоянии от перпендикуляра ($Aa = A'a$), то такие точки называются **симметричными относительно прямой MN** .

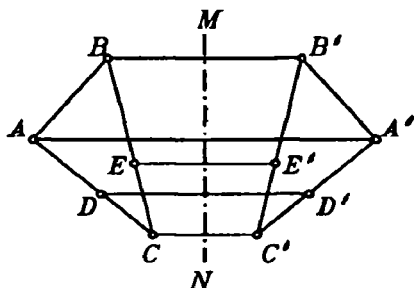


Рис. 40.

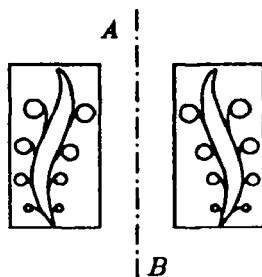


Рис. 41.

Две фигуры (или две части одной и той же фигуры) называются **симметричными относительно прямой MN** , если каждой точке $A, B, C, D, E, \dots$ (рис. 40) одной фигуры (или одной части фигуры) соответствуют симметричные точки $A', B', C', D', E', \dots$ другой фигуры (или другой части фигуры), и наоборот. Прямая MN в таком случае называется **осью симметрии**. Здесь слово «ось» применяется потому, что если часть плоскости, лежащую по одну сторону от прямой MN (например, левую часть), станем вращать вокруг MN , как около оси, до тех пор, пока эта часть плоскости не упадет на ту часть, которая лежит по другую сторону от прямой MN (на правую часть), то симметричные фигуры совместятся, так как точка A упадет при этом в точку A' , точка B — в точку B' и т. д.

Обратно, если вращением вокруг некоторой прямой мы можем фигуру, лежащую по одну сторону от этой прямой, совместить с фигурой, лежащей по другую ее сторону, то эти фигуры симметричны относительно оси вращения. Из сказанного следует, что:

всякие две фигуры, симметричные относительно какой-либо оси, равны между собой.

Симметрия относительно оси называется осевой симметрией.

Замечание. Хотя симметричные фигуры вращением вокруг оси симметрии могут быть приведены в совмещение, однако они, вообще говоря, не тождественны в своем расположении на плоскости. Это нужно понимать в следующем смысле:

чтобы совместить две симметричные фигуры, необходимо одну из них перевернуть другой стороной и, следовательно, на время вывести ее из плоскости. Если же не выводить фигуры из плоскости, то, вообще говоря, никаким перемещением в этой плоскости нельзя привести ее к совпадению с фигурой, ей симметричной относительно оси.

На рисунке 41 изображены два узора, симметричные относительно прямой AB . Вращая правый узор относительно прямой AB , его можно совместить с левым узором.

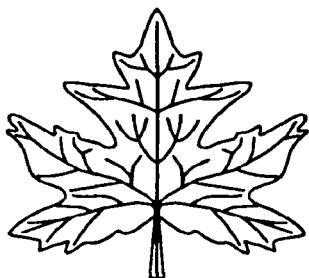


Рис. 42.

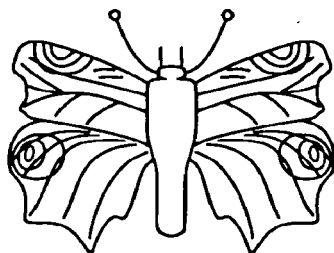


Рис. 43.

При этом правый узор будет перевернут другой стороной. Но если не отрывать правого узора от плоскости, а перемещать его так, чтобы он скользил по плоскости, то никаким передвижением его не удастся совместить с левым узором. Осевая симметрия часто встречается в обыденной жизни. Узоры на декоративных тканях и на комнатных обоях, архитектурные украшения на зданиях в виде плоских рисунков и самые фасады зданий имеют обычно форму, симметричную относительно некоторой оси. В природе также часто встречаются симметричные формы. Так, листья деревьев и лепестки цветов имеют форму, симметричную относительно среднего стебля. Таков изображенный на рисунке 42 лист клена. Кры-

ля бабочки и самая их расцветка имеют форму, симметричную относительно оси ее туловища (рис. 43).

Некоторые свойства равнобедренного треугольника

38. Теоремы. 1) *В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине есть одновременно и медиана и высота.*

2) *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*

Пусть $\triangle ABC$ (рис. 44) равнобедренный и прямая BD делит пополам угол B при вершине его. Требуется доказать, что эта биссектриса BD есть также медиана и высота.

Вообразим, что $\triangle ABD$ повернут вокруг стороны BD , как около оси, так, чтобы он упал на $\triangle BDC$. Тогда, вследствие равенства углов 1 и 2, сторона AB упадет на BC , а вследствие равенства этих сторон точка A совпадет с C . Поэтому DA совместится с DC , угол 4 совместится с углом 3 и угол 5 — с углом 6; значит,

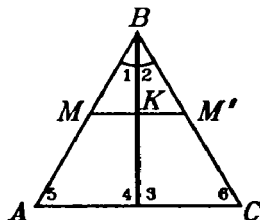


Рис. 44.

$$DA=DC, \angle 4=\angle 3 \text{ и } \angle 5=\angle 6.$$

Из того, что $DA=DC$, следует, что BD есть медиана; из того, что углы 3 и 4 равны, вытекает, что эти углы прямые и, следовательно, BD есть высота треугольника и, наконец, углы 5 и 6 при основании треугольника равны.

39. Следствие. Мы видим, что в равнобедренном треугольнике ABC (рис. 44) одна и та же прямая BD обладает четырьмя свойствами: она есть биссектриса угла при вершине, медиана, проведенная к основанию, высота, опущенная на основание, и, наконец, перпендикуляр к основанию, восстановленный из его середины.

Так как каждое из этих четырех свойств вполне определяет положение прямой BD , то существование одного из них влечет за собой все остальные. Например, *высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, служит одновременно биссектрисой угла при вершине, медианой, проведенной к основанию, и перпендикуляром к основанию, восстановленным в его середине.*

40. Симметрия равнобедренного треугольника. Мы видели, что равнобедренный $\triangle ABC$ (рис. 44) делится биссектрисой BD на такие два треугольника (левый и правый), которые вращением вокруг биссектрисы могут быть совмещены один с другим. Из этого можно заключить, что какую бы точку на одной половине равнобедренного треугольника мы ни взяли, всегда можно на другой его половине найти точку, симметричную с первой относительно оси BD . Возьмем, например, на стороне AB точку M (рис. 44). Опустим из нее на BD перпендикуляр $МК$ и продолжим его до пересечения со стороной BC . Мы получим тогда на этой стороне точку M' , симметричную с точкой M относительно оси BD . Действительно, если, вращая $\triangle ABD$ вокруг BD , мы его совместим с $\triangle CBD$, то при этом KM пойдет по KM' (по равенству прямых углов), а сторона BA упадет на сторону BC (по равенству углов при вершине B); значит, точка M , которая лежит на KM и на BA , упадет в точку M' , которая лежит и на KM' , и на BC . Отсюда видно, что $KM=KM'$. Таким образом, точки M и M' лежат по разные стороны от биссектрисы BD , на одном к ней перпендикуляре и на равных расстояниях от основания этого перпендикуляра; значит, эти точки симметричны относительно оси BD . Таким образом, *в равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине есть его ось симметрии.*

Признаки равенства треугольников

41. Предварительные понятия. Две геометрические фигуры, например два треугольника, как мы знаем, называются **равными**, если они при наложении могут быть совмещены. В совмещающихся треугольниках, конечно, должны быть соответственно равны все элементы их, т. е. стороны, углы, высоты, медианы и биссектрисы. Однако для того чтобы утверждать, что два треугольника равны, нет необходимости устанавливать равенства всех их элементов, достаточно убедиться в равенстве только некоторых из них.

42. Три признака равенства треугольников.

Теоремы. 1) *Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.*

2) Если два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника, то такие треугольники равны.

3) Если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

1) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника (рис. 45), у которых

$$AC=A_1C_1, AB=A_1B_1, \angle A=\angle A_1.$$

Требуется доказать, что эти треугольники равны.

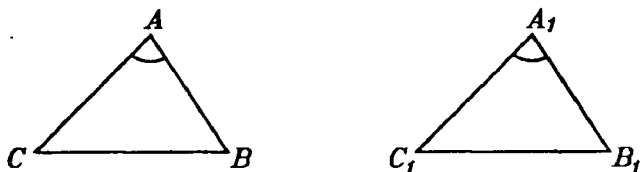


Рис. 45.

Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы точка A совпала с A_1 и сторона AC пошла по A_1C_1 ¹. Тогда, вследствие равенства этих сторон, точка C совместится с C_1 , вследствие равенства углов A и A_1 сторона AB пойдет по A_1B_1 , а вследствие равенства этих сторон точка B совпадет с B_1 , поэтому сторона CB совместится с C_1B_1 (так как две точки можно соединить только одной прямой), и треугольники совпадут; значит, они равны.

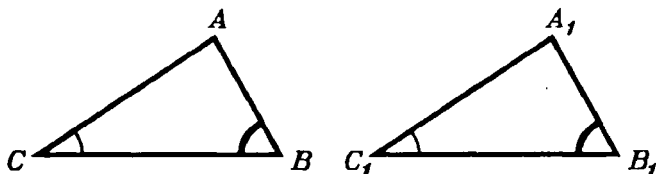


Рис. 46.

2) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 46) — два треугольника, у которых:

$$\angle C=\angle C_1 \text{ и } \angle B=\angle B_1, CB=C_1B_1.$$

Требуется доказать, что эти треугольники равны.

Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы точка C совпала с C_1 и сторона CB пошла по C_1B_1 . Тогда, вследствие равенства

¹ Для выполнения указанных в этом параграфе наложений иногда приходится накладываемый треугольник перевернуть другой стороной.

этих сторон, точка B совпадет с B_1 , а вследствие равенства углов B и B_1 , C и C_1 сторона BA пойдет по B_1A_1 и сторона CA — по C_1A_1 .

Так как две прямые могут пересечься только в одной точке, то вершина A должна совпасть с A_1 . Таким образом, треугольники совместятся; значит, они равны.

3) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 47) — два треугольника, у которых:

$$AB=A_1B_1, BC=B_1C_1 \text{ и } CA=C_1A_1.$$

Требуется доказать, что эти треугольники равны.

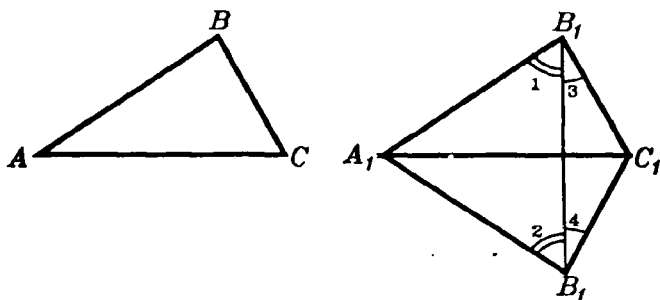


Рис. 47.

Доказывать этот признак равенства наложением, как это мы делали для первых признаков, было бы неудобно, так как, не зная ничего о величине углов, мы не можем утверждать, что при совпадении двух равных сторон совпадут и остальные стороны.

Вместо наложения применим здесь **приложение**.

Приложим $\triangle ABC$ к $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совместились равные стороны AC и A_1C_1 . Тогда $\triangle ABC$ займет положение $A_1B_1C_2$.

Соединив прямой точки B_1 и B_2 , мы получим два равнобедренных треугольника $A_1B_1C_2$ и $B_1C_1B_2$ с общим основанием B_1B_2 . Но в равнобедренном треугольнике углы при основании равны (§ 38); следовательно, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, а потому $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_2C_1 = \angle B$. Но в таком случае данные треугольники должны быть равны, так как две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника¹.

¹ Чтобы прямая B_1B_2 проходила всегда внутри фигуры $A_1B_1C_1B_2$, надо прикладывать треугольники друг к другу так, чтобы общая сторона их A_1C_1 была наибольшая из сторон.

Замечание. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, и обратно, против равных углов лежат равные стороны.

Доказанные теоремы о равенстве треугольников и умение распознавать равные треугольники по указанным признакам чрезвычайно облегчают решение многих геометрических задач и необходимы для доказательства многих теорем. Теоремы о равенстве треугольников являются главным средством для обнаружения свойств сложных геометрических фигур. Учащиеся убедятся в этом при дальнейшем прохождении предмета.

Внешний угол треугольника и его свойство

43. Определение. Угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника (или многоугольника), называется **внешним углом** этого треугольника (или многоугольника). Таковы, например, углы (рис. 48) BCD , CBE , BAF . В отличие от внешних углы самого треугольника (или многоугольника) называются **внутренними**.

При каждом угле треугольника (или многоугольника) можно построить по два внешних угла (продолжив одну или другую сторону угла). Эти два угла равны, как углы вертикальные.

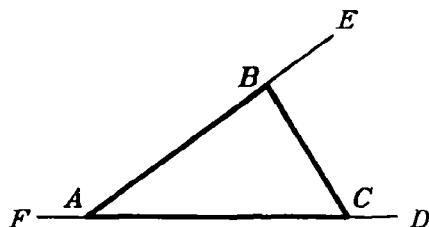


Рис. 48.

44. Теорема. Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла его, не смежного с этим внешним.

Например, докажем, что внешний $\angle BCD$ $\triangle ABC$ (рис. 49) больше каждого из внутренних углов A и B , не смежных с этим внешним.

Через середину E стороны BC проведем медиану AE и на ее продолжении отложим отрезок $EF=AE$. Точка F , очевидно, будет лежать внутри угла BCD . Соединим F с C прямой. Треугольники ABE и EFC (покрытые штрихами) равны, так как при точке E они имеют по равному углу, заключенному между двумя соответственно равными сторонами. Из равенства их заключаем, что углы B и ECF , ле-

жащие против равных сторон AE и EF , равны. Но угол ECF составляет часть внешнего угла BCD и потому меньше его; следовательно, и угол B меньше угла BCD .

Продолжив сторону BC за точку C , мы получим внеш-

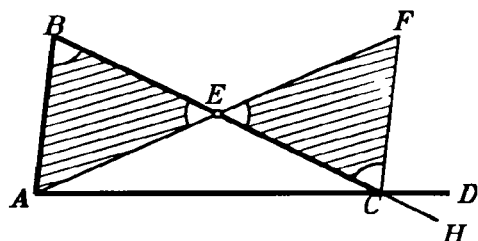


Рис. 49.

ний угол ACH , равный углу BCD . Если из вершины B проведем к стороне AC медиану и продолжим ее на такую же длину за сторону AC , то совершенно так же докажем, что угол A меньше угла ACH , т. е. меньше угла BCD .

45. Следствие. Если в треугольнике один угол прямой или тупой, то два других угла острые.

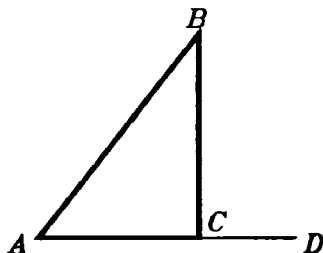


Рис. 50.

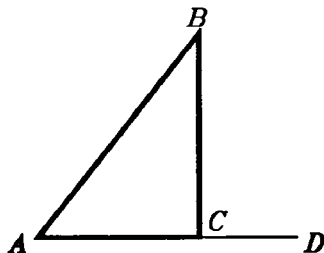


Рис. 51.

Действительно, допустим, что какой-нибудь $\angle C$ $\triangle ABC$ (рис. 50 и 51) будет прямой или тупой, тогда смежный с ним внешний угол BCD должен быть прямой или острый; следовательно, углы A и B , которые, по доказанному, меньше этого внешнего угла, должны быть оба острые.

Соотношения между сторонами и углами треугольника

46. Теоремы. Во всяком треугольнике:

- 1) *против равных сторон лежат равные углы;*
- 2) *против большей стороны лежит больший угол.*

1) Если две стороны треугольника равны, то он равнобедренный, тогда углы, лежащие против этих сторон, долж-

ны быть равны, как углы при основании равнобедренного треугольника (§ 38).

2) Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 52) сторона AB больше BC ; требуется доказать, что угол C больше угла A .

Отложим на большей стороне BA от вершины B отрезок BD , равный меньшей стороне BC , и соединим D с C прямой. Тогда получим равнобедренный $\triangle DBC$, у которого $\angle BDC = \angle BCD$. Но угол BDC , как внешний по отношению к $\triangle ADC$, больше угла A , следовательно, и угол BCD больше угла A , а потому и подавно угол BCA больше угла A , что и требовалось доказать.

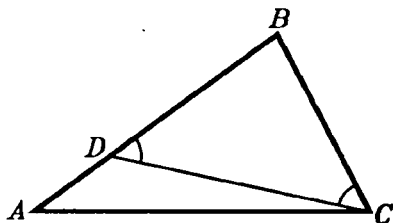


Рис. 52.

47. Обратные теоремы. Во всяком треугольнике:

- 1) *против равных углов лежат равные стороны;*
- 2) *против большего угла лежит бо́льшая сторона.*

1) Пусть в $\triangle ABC$ углы A и C равны (рис. 53); требуется доказать, что $BA = BC$.

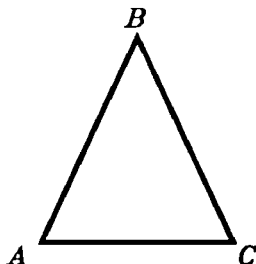


Рис. 53.

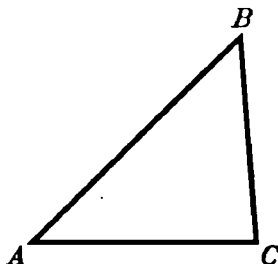


Рис. 54.

Предположим противное, т. е. что стороны AB и BC не равны. Тогда одна из этих сторон должна быть больше другой, и, следовательно, согласно прямой теореме, один из углов A и C должен быть больше другого. Но это противоречит условию, что $\angle A = \angle C$; значит, нельзя допустить, что стороны AB и BC не равны, остается принять, что $AB = BC$.

2) Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 54) угол C больше угла A ; требуется доказать, что $AB > BC$.

Предположим противное, т. е. что AB не больше BC . Тогда могут представиться два случая: или $AB = BC$, или $AB < BC$.

В первом случае, согласно прямой теореме, угол C был бы равен углу A , во втором случае угол C был бы меньше угла A ; и то и другое противоречит условию; значит, оба эти случая исключаются. Остается один возможный случай, что $AB > BC$.

Следствия. 1) *В равностороннем треугольнике все углы равны.*

2) *В равноугольном треугольнике все стороны равны.*

48. Доказательство от противного. Способ, которым мы только что доказали обратные теоремы, называется **доказательством от противного**, или **приведением к нелепости** (*reductio ad absurdum*). Первое название этот способ получил потому, что в начале рассуждения делается предположение, **противное** (противоположное) тому, что требуется доказать. Приведением к нелепости он называется вследствие того, что, рассуждая на основании сделанного предположения, мы приходим к нелепому выводу (к абсурду). Получение такого вывода заставляет нас отвергнуть сделанное вначале допущение и принять то, которое требовалось доказать.

Этот прием очень часто употребляется для доказательства теорем.

49. Замечание об обратных теоремах. Начиная изучать геометрию часто делают одну характерную ошибку. Она заключается в том, что правильность обратной теоремы считают само собой разумеющейся, если доказана прямая теорема. Отсюда представление, что доказательство обратных теорем вообще излишне. Ошибочность такого заключения может быть показана в ряде примеров. В частности, такой пример был приведен в § 30. Поэтому обратные теоремы, когда они верны, всегда доказываются особо.

Сравнительная длина прямолинейного отрезка и ломаной линии

50. Теорема. *В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.*

Если в треугольнике возьмем сторону не самую большую, то, конечно, она окажется менее суммы двух других сторон. Значит, нам надо доказать, что даже **наибольшая** сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 55) наибольшая сторона есть AC . Продолжив сторону AB , отложим $BD = BC$ и проведем DC . Так

как $\triangle BDC$ равнобедренный, то $\angle D = \angle DCB$; поэтому угол D меньше угла DCA , и, следовательно, в $\triangle ADC$ сторона AC меньше AD (§ 47), т. е. $AC < AB + BD$. Заменив BD на BC , получим:

$$AC < AB + BC.$$

Следствие. Отнимем от обеих частей выведенного неравенства по AB или по BC :

$$AC - AB < BC; \quad AC - BC < AB.$$

Читая эти неравенства справа налево, видим, что каждая из сторон BC и AB больше разности двух других сторон; так как это же можно, очевидно, сказать и о третьей, наибольшей стороне AC , то, значит, *в треугольнике каждая сторона больше разности двух других сторон.*

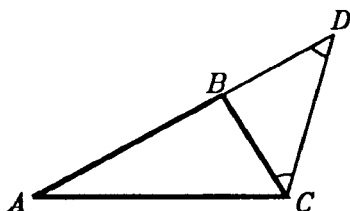


Рис. 55.

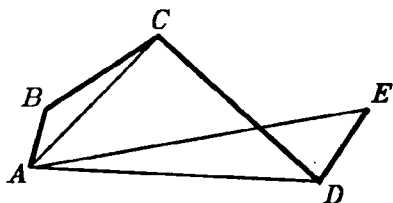


Рис. 56.

51. Теорема. *Отрезок прямой, соединяющий две какие-нибудь точки, меньше всякой ломаной, соединяющей эти же точки.*

Если ломаная, о которой говорится здесь, состоит только из двух сторон, то теорема уже была доказана в предыдущем параграфе. Рассмотрим случай, когда ломаная состоит более чем из двух сторон.

Пусть AE (рис. 56) есть отрезок прямой, соединяющий точки A и E , а $ABCDE$ — какая-нибудь ломаная, соединяющая те же точки. Требуется доказать, что AE меньше суммы $AB + BC + CD + DE$.

Соединив A с C и D , находим, согласно предыдущей теореме:

$$AE < AD + DE; \quad AD < AC + CD; \quad AC < AB + BC.$$

Сложим почленно эти неравенства и затем от обеих частей полученного неравенства отнимем по AD и AC , тогда получим:

$$AE < AB + BC + CD + DE.$$

52. Треугольники с двумя соответственно равными сторонами.

Теоремы. Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то:

1) против большего из углов, заключенных между ними, лежит большая сторона;

2) обратно: против большей из неравных сторон лежит больший угол.

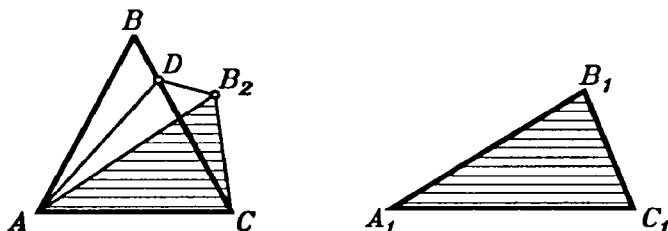


Рис. 57.

1) Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано (рис. 57): $AC=A_1C_1$, $AB=A_1B_1$ и $\angle A > \angle A_1$. Требуется доказать, что $BC > B_1C_1$. Наложим $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ так, чтобы сторона A_1C_1 совпадала с AC . Так как $\angle A_1 < \angle BAC$, то сторона A_1B_1 пойдет внутри угла BAC ; пусть $\triangle A_1B_1C_1$ займет положение AB_2C (вершина B_2 может оказаться или вне $\triangle ABC$, или внутри него, или же на стороне BC ; доказательство может быть применено ко всем этим случаям). Проведем биссектрису AD угла BAB_2 и соединим D с B_2 ; тогда получим два треугольника: ABD и DAB_2 , которые равны, потому что у них AD — общая сторона. $AB=AB_2$ по условию и $\angle BAD=\angle DAB_2$ по построению. Из равенства треугольников следует: $BD=DB_2$. Теперь из $\triangle DCB_2$ выводим: $B_2C < B_2D+DC$ (§ 50), или (заменив B_2D на BD): $B_2C < BD+DC$, значит, $B_1C_1 < BC$.

2) Пусть в тех же треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано: $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ и $BC > B_1C_1$; докажем, что $\angle A > \angle A_1$.

Допустим противное, т. е. что угол A не больше угла A_1 , тогда могут представиться два случая: или $\angle BAC = \angle A_1$, или $\angle BAC < \angle A_1$. В первом случае треугольники были бы равны и, следовательно, сторона BC равнялась бы B_1C_1 , что противоречит условию; во втором случае сторона BC (согласно теореме 1) была бы меньше B_1C_1 , что также противоречит условию. Значит, оба эти случая исключаются; остается один возможный случай, что $\angle A = \angle A_1$.

Сравнительная длина перпендикуляра и наклонных

53. Теорема. *Перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки на прямую, меньше всякой наклонной, проведенной из той же точки на эту прямую¹.*

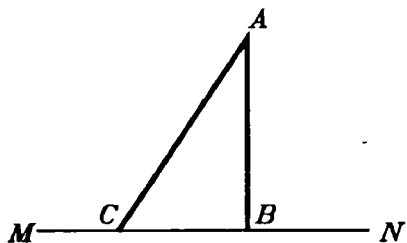


Рис. 58.

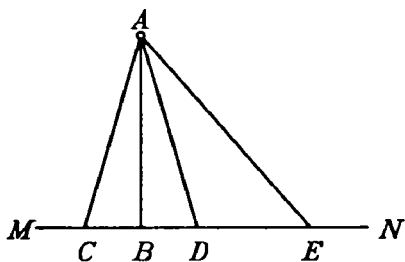


Рис. 59.

Пусть AB (рис. 58) есть перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую MN , и AC — какая-нибудь наклонная, проведенная из той же точки A к прямой MN ; требуется доказать, что $AB < AC$.

В $\triangle ABC$ угол B прямой, а угол C острый (§ 45); значит, $\angle C < \angle B$, и потому $AB < AC$, что и требовалось доказать.

Замечание. Когда говорят: «расстояние от точки до прямой», то разумеют кратчайшее расстояние, измеряемое по перпендикуляру, опущенному из этой точки на прямую.

54. Теорема. *Если из одной и той же точки, взятой вне прямой, проведены к этой прямой перпендикуляр и какие-нибудь наклонные, то:*

1) *если основания двух наклонных одинаково удалены от основания перпендикуляра, то такие наклонные равны;*

2) *если основания двух наклонных неодинаково удалены от основания перпендикуляра, то та из наклонных больше, основание которой дальше отстоит от основания перпендикуляра.*

¹ В параграфах 53, 54 и 55 ради краткости термины «перпендикуляр» и «наклонная» употребляются вместо «отрезок перпендикуляра, ограниченный данной точкой и основанием перпендикуляра» и «отрезок наклонной, ограниченный данной точкой и основанием наклонной».

1) Пусть AC и AD (рис. 59) будут две наклонные, проведенные из точки A к прямой MN , основания которых C и D одинаково удалены от основания перпендикуляра AB , т. е. $CB=BD$; требуется доказать, что $AC=AD$.

В треугольниках ABC и ABD есть общая сторона AB и сверх того $BC=BD$ (по условию) и $\angle ABC=\angle ABD$ (как углы прямые); значит, эти треугольники равны, и потому $AC=AD$.

2) Пусть AC и AE (рис. 59) будут две такие наклонные, проведенные из точки A к прямой MN , основания которых неодинаково удалены от основания перпендикуляра; например, пусть $BE>BC$. Требуется доказать, что $AE>AC$.

Отложим $BD=BC$ и проведем AD . По доказанному выше $AD=AC$. Сравним AE с AD . Угол ADE есть внешний по отношению $\triangle ABD$, и потому он больше прямого угла ABD ; следовательно, угол ADE тупой, и потому угол AED должен быть острый (§ 45), значит, $\angle ADE>\angle AED$, и следовательно, $AE>AD$, и потому $AE>AC$.

55. Обратные теоремы. Если из одной и той же точки, взятой вне прямой (рис. 59), проведены к этой прямой перпендикуляр и какие-нибудь наклонные, то:

1) **если две наклонные равны, то их основания одинаково удалены от основания перпендикуляра;**

2) **если две наклонные не равны, то основание большей из них дальше отстоит от основания перпендикуляра.**

Предоставляем учащимся самим доказать эти теоремы (способом от противного).

Признаки равенства прямоугольных треугольников

56. Два признака, не требующие особого доказательства. Так как в прямоугольных треугольниках углы, содержащиеся между катетами, всегда равны, как углы прямые, то прямоугольные треугольники равны:

1) **если катеты одного треугольника соответственно равны катетам другого;**

2) **если катет и прилежащий к нему острый угол одного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого треугольника.**

Эти два признака не требуют особого доказательства, так как они представляют собой частные случаи общих признаков. Докажем еще два следующих признака, относящихся только к прямоугольным треугольникам.

57. Два признака, требующие особого доказательства.

Теоремы. Прямоугольные треугольники равны:

1) *если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, или*

2) *если гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого.*

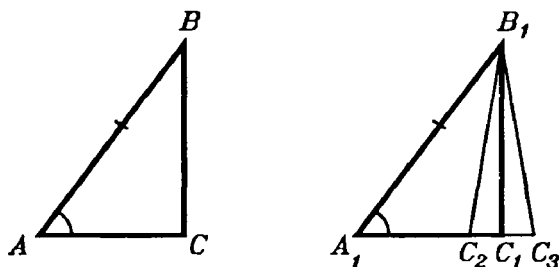


Рис. 60.

1) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 60) — два прямоугольных треугольника, у которых $AB=A_1B_1$ и $\angle A=\angle A_1$; требуется доказать, что эти треугольники равны.

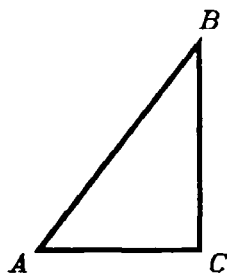


Рис. 61.

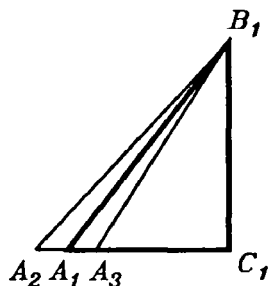


Рис. 62.

Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совместились равные гипотенузы. Тогда по равенству углов A и A_1 катет AC пойдет по A_1C_1 . При этом точка C должна совпадать с точкой C_1 , потому что если предположим, что она не совпадает с точкой C_1 , то тогда катет BC занял бы положение B_1C_2 или B_1C_3 , что невозможно, так как из одной точки B_1 нельзя на прямую A_1C_1 опустить два перпендикуляра (B_1C_1 и B_1C_2 или B_1C_1 и B_1C_3).

2) Пусть (рис. 61 и 62) в прямоугольных треугольниках дано: $AB=A_1B_1$ и $BC=B_1C_1$; требуется доказать, что треугольники равны. Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совместились равные катеты BC и B_1C_1 . Тогда по равенству прямых углов CA пойдет по C_1A_1 . При этом гипотенуза AB не может не совместиться с гипотенузой A_1B_1 , потому что если бы она заняла положение A_2B_1 или A_3B_1 , то тогда мы имели бы две равные наклонные (A_1B_1 и A_2B_1 или A_1B_1 и A_3B_1), которые неодинаково удалены от основания перпендикуляра, что невозможно (§ 54).

Свойство перпендикуляра, проведенного к отрезку прямой через его середину, и свойство биссектрисы угла

58. Свойство перпендикуляра, проведенного к отрезку прямой через его середину, и свойство биссектрисы угла очень сходны между собой. Чтобы лучше увидеть это сходство, мы изложим их параллельно.

1) Если какая-нибудь точка (K , рис. 63) лежит на перпендикуляре (MN), проведенном через середину отрезка (AB), то она одинаково удалена от концов этого отрезка (т. е. $KA=KB$).

Так как $MN \perp AB$ и $AO=OB$, то AK и KB суть наклонные к AB , основания которых одинаково удалены от основания перпендикуляра; значит, $KA=KB$.

2) Обратная теорема. Если какая-нибудь точка (K , рис. 63) одинаково удалена от концов отрезка AB (т. е. если $KA=KB$), то она лежит на перпендикуляре, проведенном к отрезку AB через его середину.

1) Если какая-нибудь точка (K , рис. 64) лежит на биссектрисе (OM) угла (AOB), то она одинаково удалена от сторон этого угла (т. е. перпендикуляры KD и KC равны).

Так как OM делит угол пополам, то прямоугольные треугольники OCK и ODK , имея общую гипотенузу и равные острые углы при вершине O , равны, и потому $KC=KD$.

2) Обратная теорема. Если какая-нибудь точка (K , рис. 64) одинаково удалена от сторон угла (т. е. если перпендикуляры KC и KD равны), то она лежит на биссектрисе этого угла.

Через O и K проведем

Проведем через K прямую $MN \perp AB$; тогда мы получим два прямоугольных треугольника KAO и KBO , которые, имея общий катет KO и равные гипотенузы, равны, а потому $AO=OB$. Значит, прямая MN , проведенная нами через K перпендикулярно к AB , делит отрезок AB пополам.

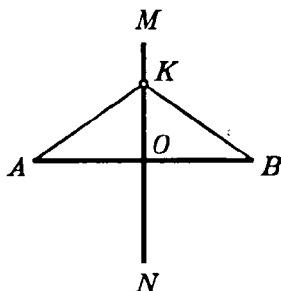


Рис. 63.

прямую OM . Тогда получим два прямоугольных треугольника OCK и ODK , которые, имея общую гипотенузу и равные катеты CK и DK , равны, а потому равны и углы при вершине O . Значит, прямая OM , проведенная через точку K , будет биссектрисой угла AOB .

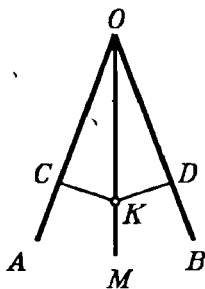


Рис. 64.

59. Следствие. Из двух доказанных теорем (прямой и обратной) можно вывести еще следующие противоположные теоремы:

Если какая-нибудь точка не лежит на перпендикуляре, проведенном к отрезку через его середину, то она неодинаково удалена от концов этого отрезка.

Если какая-нибудь точка не лежит на биссектрисе угла, то она неодинаково удалена от сторон этого угла.

Предоставляем самим учащимся доказать эти теоремы (способом от противного).

60. Геометрическое место. Геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, называется такая линия (или поверхность в пространстве) или вообще такая совокупность точек, которая содержит в себе все точки, обладающие этим свойством, и не содержит ни одной точки, не обладающей им.

Например, геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии r от данной точки C , есть окружность с центром в точке C и радиусом r .

Из теорем предыдущих параграфов следует:

Геометрическое место точек, одинаково удаленных от двух данных точек, есть перпендикуляр, проведенный к отрезку прямой, соединяющему эти точки, через его середину.

Геометрическое место точек, одинаково удаленных от сторон угла, есть биссектриса этого угла.

IV. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

61. Предварительное замечание. Теоремы, доказанные нами в предыдущих главах, позволяют решать некоторые задачи на построение. Заметим, что в элементарной геометрии рассматриваются только такие построения, которые могут быть выполнены с помощью линейки и циркуля. Употребление чертежного треугольника и некоторых других приборов хотя и допускается ради сокращения времени, но не является необходимым.

62. Задача 1. Построить треугольник по трем его сторонам a , b и c (рис. 65).

На какой-нибудь прямой MN откладываем отрезок CB , равный одной из данных сторон, например a . Описываем две небольшие дуги с центрами в точках C и B , одну радиусом, равным b , другую радиусом, равным c . Точку A , в которой эти дуги пересекаются, соединяем с B и C . $\triangle ABC$ будет искомым.

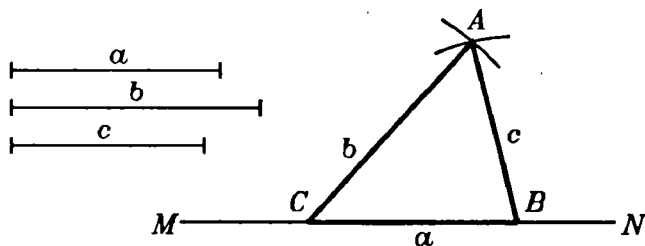


Рис. 65.

Замечание. Чтобы три отрезка прямой могли служить сторонами треугольника, необходимо, чтобы больший из них был меньше суммы двух остальных (§ 50).

63. Задача 2. Построить угол, равный данному углу ABC , одной из сторон которого является данная прямая и вершина которого находится в данной точке O (точка O расположена на прямой MN , рис. 66).

Описываем произвольным радиусом с центром в вершине B между сторонами данного угла дугу EF ; затем, не изме-

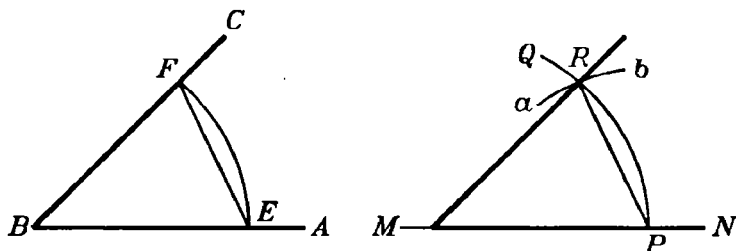


Рис. 66.

няя раствора циркуля, переносим его острие в точку O и описываем дугу PQ . Далее описываем дугу ab с центром в точке P радиусом, равным расстоянию между точками E и

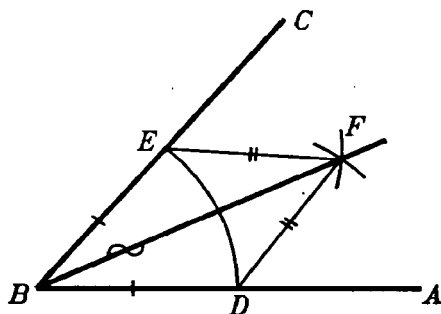


Рис. 67.

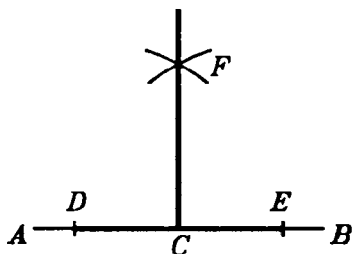


Рис. 68.

F . Наконец, через точки O и R (пересечение двух дуг) проводим прямую. Угол ROP равен углу ABC , потому что треугольники ROP и FBE , имеющие соответственно равные стороны, равны.

64. Задача 3. Разделить данный угол ABC пополам (рис. 67), другими словами, построить биссектрису данного угла или провести его ось симметрии. С центром в вершине B произвольным радиусом опишем между сторонами угла дугу DE . Затем, взяв произвольный раствор циркуля, больший, однако, половины расстояния между точками E и D (см. замечание к задаче 1), описываем этим раствором небольшие дуги с центрами в точках D и E , которые пересекутся в некоторой точке F . Проведя прямую BF , мы получим биссектрису угла ABC .

Для доказательства соединим прямыми точку F с D и E ; тогда получим два треугольника BEF и BDF , которые равны, так как у них BF — общая сторона, $BD=BE$ и $DF=EF$ по построению. Из равенства треугольников следует: $\angle ABF = \angle CBF$.

65. Задача 4. Из данной точки C прямой AB восставить к этой прямой перпендикуляр (рис. 68).

Отложим на AB по обе стороны от данной точки C равные отрезки (произвольной длины) CD и CE . С центрами в точках E и D с одним и тем же раствором циркуля (большим, однако, CD) опишем две небольшие дуги, которые пересекутся в некоторой точке F . Прямая, проведенная через точки C и F , будет искомым перпендикуляром.

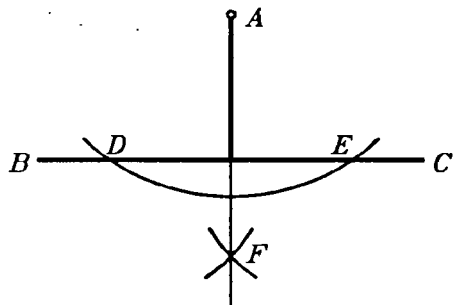


Рис. 69.

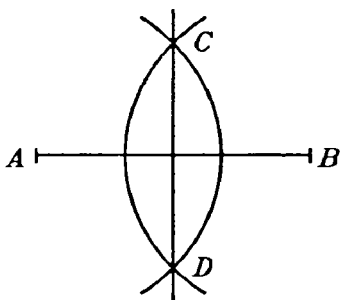


Рис. 70.

Действительно, как видно из построения, точка F одинаково удалена от точек D и E ; следовательно, она должна лежать на перпендикуляре, проведенном к отрезку DE через его середину (§ 58); но середина этого отрезка есть C , а через точки C и F можно провести только одну прямую; значит, $FC \perp DE$.

66. Задача 5. Из данной точки A опустить перпендикуляр на данную прямую BC (рис. 69).

С центром в точке A произвольным раствором циркуля (большим, однако, расстояния от A до BC) опишем дугу, которая пересечется с BC в каких-нибудь точках D и E . С центрами в этих точках произвольным, но одним и тем же раствором циркуля (большим, однако, $\frac{1}{2}DE$) проводим две небольшие дуги, которые пересекутся между собой в некоторой точке F . Прямая AF будет искомым перпендикуляром.

Действительно, как видно из построения, каждая из точек A и F одинаково удалена от D и E , а такие точки лежат

на перпендикуляре, проведенном к отрезку DE через его середину (§ 58).

67. Задача 6. Провести перпендикуляр к данному отрезку прямой (AB) через его середину (рис. 70); другими словами, построить ось симметрии отрезка (AB).

Произвольным, но одинаковым раствором циркуля (большим $\frac{1}{2}AB$) описываем две дуги с центрами в точках A и B , которые пересекутся между собой в некоторых точках C и D . Прямая CD будет искомым перпендикуляром.

Действительно, как видно из построения, каждая из точек C и D одинаково удалена от A и B ; следовательно, эти точки должны лежать на оси симметрии отрезка AB .

Задача 7. Разделить пополам данный отрезок прямой (рис. 70).

Решается так же, как предыдущая задача.

68. Пример более сложной задачи. При помощи этих основных задач можно решать задачи более сложные. Для примера рассмотрим следующую задачу.

Задача. Построить треугольник, зная его основание b , угол α , прилежащий к основанию, и сумму s двух боковых сторон (рис. 71).

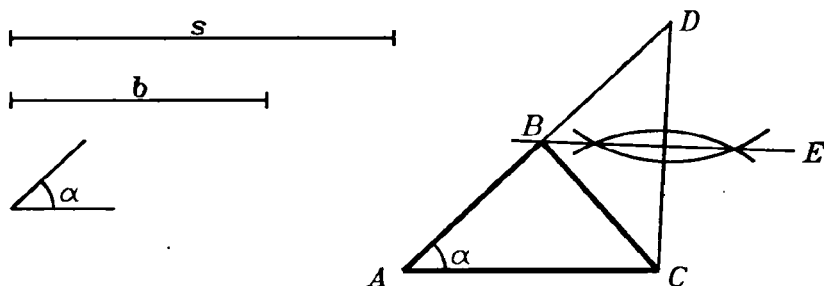


Рис. 71.

Чтобы составить план решения, предположим, что задача решена, т. е. что найден такой $\triangle ABC$, у которого основание $AC = b$, $\angle A = \alpha$ и $AB + BC = s$. Рассмотрим теперь полученный чертеж. Сторону AC , равную b , и угол A , равный α , мы построить умеем. Значит, остается найти на другой стороне угла A такую точку B , чтобы сумма $AB + BC$ равнялась s . Продолжив AB , отложим отрезок AD , равный s .

Теперь вопрос приводится к тому, чтобы на прямой AD отыскать такую точку B , которая была бы одинаково удалена

от C и D . Такая точка, как мы знаем (§ 58), должна лежать на перпендикуляре, проведенном к отрезку CD через его середину. Точка B найдется в пересечении этого перпендикуляра с AD .

Итак, вот решение задачи: строим (рис. 71) угол A , равный данному углу α ; на сторонах его откладываем $AC=b$ и $AD=a$ и соединяем точку D с C . Через середину отрезка CD проводим перпендикуляр BE ; пересечение его с AD , т. е. точку B , соединяем с C . $\triangle ABC$ будет искомым, так как он удовлетворяет всем требованиям задачи: у него $AC=b$, $\angle A=\alpha$ и $AB+BC=a$ (потому что $BD=BC$).

Рассматривая построение, мы замечаем, что задача возможна не при всяких данных. Действительно, если сумма задана слишком малой сравнительно с b , то перпендикуляр BE может не пересечь отрезка AD (или пересечет его продолжение за точку A или за точку D); в этом случае задача окажется невозможной. И независимо от построения можно видеть, что задача невозможна, если $s < b$ или $s=b$, потому что не может быть такого треугольника, у которого сумма двух сторон была бы меньше или равна третьей стороне.

В том случае, когда задача возможна, она имеет только одно решение, т. е. существует только один треугольник, удовлетворяющий требованиям задачи, так как перпендикуляр BE может пересечься с прямой AD только в одной точке.

69. З а м е ч а н и е. Из приведенного примера видно, что решение сложной задачи на построение состоит из следующих четырех частей:

1) Предположив, что задача решена, делают от руки приблизительный чертеж искомой фигуры и затем, внимательно рассматривая начерченную фигуру, стремятся найти такие зависимости между данными задачи и искомыми, которые позволили бы свести задачу к другим, известным ранее. Эта самая важная часть решения задачи, имеющая целью составить план решения, носит название анализа.

2) Когда таким образом план решения найден, выполняют сообразно ему построение.

3) Для проверки правильности плана показывают затем на основании известных теорем, что полученная фигура удовлетворяет всем требованиям задачи. Эта часть называется синтезом.

4) Затем задаются вопросом, при всяких ли данных задача возможна, допускает ли она одно решение или несколько.

ко, и нет ли в задаче каких-либо особенных случаев, когда построение упрощается или, наоборот, усложняется. Эта часть решения называется исследованием задачи.

Когда задача слишком проста и не может быть сомнения относительно ее возможности, то обыкновенно анализ и исследование опускают, а указывают прямо построение и приводят доказательство. Так мы делали, излагая решение первых семи задач этой главы; так же будем делать и впоследствии, когда нам придется излагать решение несложных задач.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать теоремы

1. В равнобедренном треугольнике две медианы равны, две биссектрисы равны, две высоты равны.

2. Если из середины каждой из равных сторон равнобедренного треугольника восставим перпендикуляры до пересечения с другой из равных сторон, то эти перпендикуляры равны.

3. Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла, отсекает от его сторон равные отрезки.

4. Медиана треугольника меньше его полупериметра.

5. Медиана треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она заключается.

Указание. Продолжить медиану на расстояние, равное ей, полученную точку соединить с одним концом стороны, к которой проведена медиана, и рассмотреть образовавшуюся фигуру.

6. Сумма медиан треугольника меньше периметра, но больше полупериметра.

Указание. См. предыдущее упражнение, а также следствие в § 50.

7. Сумма диагоналей четырехугольника меньше его периметра, но больше полупериметра.

8. Доказать, как прямую теорему, что всякая точка, не лежащая на перпендикуляре, проведенном к отрезку прямой через его середину, неодинаково удалена от концов этого отрезка, а именно: она ближе к тому концу, с которым она расположена по одну сторону от перпендикуляра.

9. Доказать как прямую теорему, что всякая точка, не лежащая на биссектрисе угла, неодинаково отстоит от сторон его.

10. Медиана, исходящая из какой-нибудь вершины треугольника, равно отстоит от двух других его вершин.

11. На одной стороне угла A отложены отрезки AB и AC и на другой стороне отложены отрезки $AB'=AB$ и $AC'=AC$. Доказать, что прямые BC' и $B'C$ пересекаются на биссектрисе угла A .

12. Вывести отсюда способ построения биссектрисы угла.

13. Если A и A' , B и B' — две пары точек, симметричных относительно какой-нибудь прямой XU , то четыре точки A , A' , B , B' лежат на одной окружности.

14. Дан острый угол XOY и точка A внутри этого угла. Найти на стороне OX точку B и на стороне OY точку C так, чтобы периметр $\triangle ABC$ был наименьший.

У к а з а н и е. Надо взять точки, симметричные с A относительно сторон OX и OY .

Задачи на построение

15. Построить сумму двух, трех и более углов.

16. Построить разность двух углов.

17. По данной сумме и разности двух углов найти эти углы.

18. Разделить угол на 4, 8 и 16 равных частей.

19. Через вершину данного угла провести вне его такую прямую, которая со сторонами угла образовала бы равные углы.

20. Построить треугольник: а) по двум сторонам и углу между ними; б) по стороне и двум прилежащим углам; в) по двум сторонам и углу, лежащему против большей из них; г) по двум сторонам и углу, лежащему против меньшей из них (в этом случае получаются два решения, или одно, или ни одного).

21. Построить равнобедренный треугольник: а) по основанию и боковой стороне; б) по основанию и прилежащему углу; в) по боковой стороне и углу при вершине; г) по боковой стороне и углу при основании.

22. Построить прямоугольный треугольник: а) по двум катетам; б) по катету и гипотенузе; в) по катету и прилежащему острому углу.

23. Построить равнобедренный треугольник: а) по высоте и боковой стороне; б) по высоте и углу при вершине; в) по основанию и перпендикуляру, опущенному из конца основания на боковую сторону.

24. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

25. Через точку, данную внутри угла, провести такую прямую, которая отсекала бы от сторон угла равные части.

26. По данной сумме и разности двух отрезков найти эти отрезки.

27. Разделить данный отрезок на 4, 8, 16 равных частей.

28. На данной прямой найти точку, одинаково удаленную от двух данных точек (вне прямой).

29. Найти точку, равно отстоящую от трех вершин треугольника.

30. На прямой, пересекающей стороны угла, найти точку, одинаково удаленную от сторон этого угла.

31. Найти точку, одинаково удаленную от трех сторон треугольника.

32. На бесконечной прямой AB найти такую точку C , чтобы полупрямые CM и CN , проведенные из C через данные точки M и N , расположенные по одну сторону от AB , составляли с полупрямыми CA и CB равные углы.

Указание. Построить точку M' , симметричную с M относительно оси AB , и соединить M' с M .

33. Построить прямоугольный треугольник по катету и сумме гипотенузы с другим катетом.

34. Построить треугольник по основанию, углу, прилежащему к основанию, и разности двух других сторон [рассмотреть два случая: 1) когда дан меньший из двух углов, прилежащих к основанию; 2) когда дан больший из них].

Указание. См. задачу § 68.

35. Построить прямоугольный треугольник по катету и разности двух других сторон.

36. Дан угол A и точки B и C , расположенные одна на одной стороне угла, другая — на другой. Найти: 1) точку M , равно отстоящую от сторон угла, и такую, чтобы $MC=MB$; 2) точку N , равно отстоящую от сторон угла так, чтобы $NC=CB$.

37. По соседству с железной дорогой расположены две деревни A и B . Найти на линии железной дороги (имеющей прямолинейную форму) место для станции, которая была бы одинаково удалена от A и B .

38. Дан угол A и точка B на одной из его сторон. Найти на другой стороне такую точку C , чтобы сумма $CA+CB$ была равна данному отрезку l .

V. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

Основные теоремы

70. Определение. Две прямые называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются, сколько бы мы их ни продолжали.

Параллельность прямых обозначается письменно знаком $||$. Так, если прямые AB и CD параллельны, то пишут: $AB||CD$.

Возможность существования параллельных прямых обнаруживается следующей теоремой.

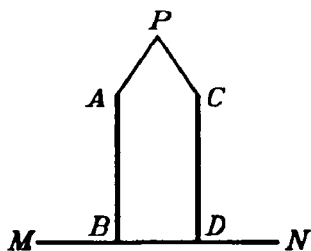


Рис. 72.

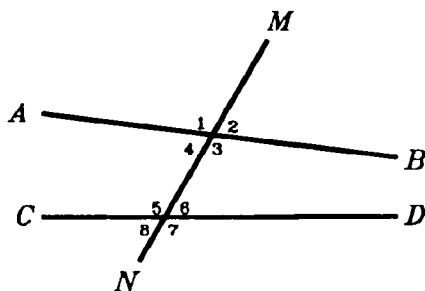


Рис. 73.

71. Теорема. *Два перпендикуляра (AB и CD , рис. 72) к одной и той же прямой (MN) не могут пересечься, сколько бы мы их ни продолжали.*

Действительно, если бы эти перпендикуляры пересекались в какой-нибудь точке P , то из этой точки на прямую MN были бы опущены два перпендикуляра, что невозможно (§ 24).

Таким образом, два перпендикуляра к одной прямой параллельны между собой.

72. Названия углов, получаемых при пересечении двух прямых третьей. Пусть две прямые AB и CD (рис. 73) пересечены третьей прямой MN . Тогда получаются 8 углов (мы их обозначим цифрами), которые попарно носят следующие названия:

соответственные углы: 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7;

накрест лежащие углы: 3 и 5, 4 и 6 (внутренние); 1 и 7, 2 и 8 (внешние);

односторонние углы: 4 и 5, 3 и 6 (внутренние); 1 и 8, 2 и 7 (внешние).

73. Признаки параллельности двух прямых. Если при пересечении двух прямых (AB и CD , рис. 74) третьей прямой (MN) окажется, что:

- 1) *какие-нибудь соответственные углы равны, или*
 - 2) *какие-нибудь накрест лежащие углы равны, или*
 - 3) *сумма каких-нибудь двух внутренних или двух внешних односторонних углов равна $2d$,*
- то эти прямые параллельны.*

Пусть, например, дано, что соответственные углы 2 и 6 равны; требуется доказать, что в таком случае $AB \parallel CD$.

Предположим противное, т. е. что прямые AB и CD не параллельны; тогда эти прямые пересекутся в какой-нибудь точке p , лежащей направо от MN , или в какой-нибудь точке p' , лежащей налево от MN . Если пересечение будет в p , то образуется треугольник, в котором угол 2 будет внешним, а угол 6 — внутренним, не смежным с внешним углом 2, и, значит, тогда угол 2 должен быть больше угла 6 (§ 44), что противоречит условию; значит, пересечься в какой-нибудь точке p , лежащей направо от MN , прямые AB и CD не могут. Если предположим, что пересечение будет в точке p' , то тогда образуется треугольник, у которого угол 4, равный углу 2, будет внутренним, а угол 6 — внешним, не смежным с внутренним углом 4; тогда угол 6 должен быть больше угла 4 и, следовательно, больше угла 2, что противоречит условию. Значит, прямые AB и CD не могут пересечься и в точке, лежащей налево от MN ; следовательно, эти прямые нигде не пересекаются, т. е. они параллельны.

Подобным же образом доказывается, что $AB \parallel CD$, если $\angle 1 = \angle 5$ или $\angle 3 = \angle 7$ и т. д.

Пусть еще дано, что $\angle 4 = \angle 5 = 2d$. Тогда мы должны заключить, что $\angle 4 = \angle 6$, так как угол 6 в сумме с углом 5 тоже

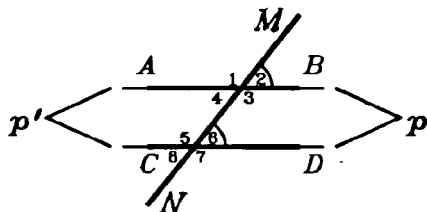


Рис. 74.

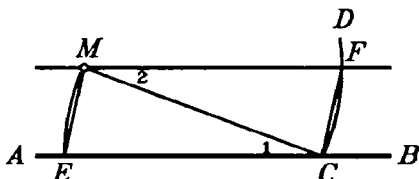


Рис. 75.

составляет $2d$. Но если $\angle 4 = \angle 6$, то прямые не могут пересечься, так как в противном случае углы 4 и 6 не могли бы быть равными (один был бы внешний, а другой внутренний, не смежный с ним).

74. Задача. Через данную точку M (рис. 75) провести прямую, параллельную данной прямой AB .

Наиболее простое решение этой задачи состоит в следующем: описываем произвольным радиусом с центром в точке M дугу CD , далее описываем с центром в точке C тем же радиусом дугу ME . Затем, дав циркулю раствор, равный расстоянию от E до M , описываем небольшую дугу с центром в точке C , которая пересечется с CD в некоторой точке F . Прямая MF будет параллельна AB .

Для доказательства проведем вспомогательную прямую MC ; образовавшиеся при этом углы 1 и 2 равны по построению (ибо треугольники EMC и MCF равны по трем сторонам), а если накрест лежащие углы равны, то линии параллельны.

Для построения параллельных прямых удобно пользоваться треугольником и линейкой, как это видно из рисунка 76.

75. Аксиома параллельных линий. Через одну и ту же точку нельзя провести двух различных прямых, параллельных одной и той же прямой.

Так, если (рис. 77) $CE \parallel AB$, то никакая другая прямая CE , проведенная через точку C , не может быть параллельной AB , т.е. CE' при продолжении пересечется с AB .

Доказать это предложение, т.е. вывести его как следствие из ранее принятых аксиом, оказывается невозможным. Поэтому приходится принимать его как некоторое допущение (постулат, или аксиому).

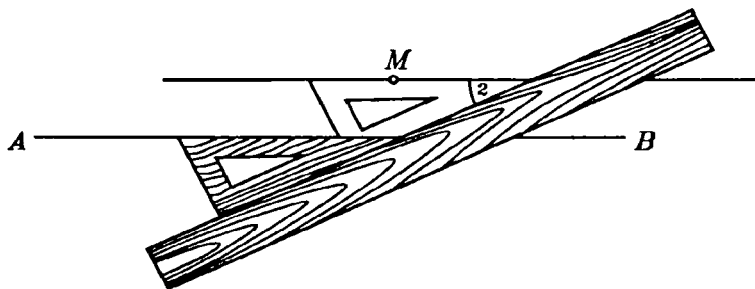


Рис. 76.

76. Следствия. 1) Если $CE \parallel AB$ (рис. 77) и какая-нибудь третья прямая CE' пересекается с одной из этих двух параллельных, то она пересекается и с другой. В противном случае через одну и ту же точку C проходили бы две различные прямые CE' и CE , параллельные AB , что невозможно.

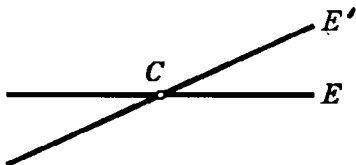


Рис. 77.



Рис. 78.

2) Если каждая из двух прямых A и B (рис. 78) параллельна одной и той же третьей прямой C , то они параллельны между собой. Действительно, если бы мы предположили, что прямые A и B пересекаются в некоторой точке M , то тогда через эту точку проходили бы две различные прямые, параллельные C , что невозможно.

77. Об углах, образующихся при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, не параллельной двум данным.

Теорема (обратная теорема, § 73).

Если две параллельные прямые (AB и CD , рис. 79) пересечены какой-нибудь прямой (MN), то:

- 1) *соответственные углы равны;*
- 2) *накрест лежащие углы равны;*
- 3) *сумма внутренних односторонних углов равна $2d$;*
- 4) *сумма внешних односторонних углов равна $2d$.*

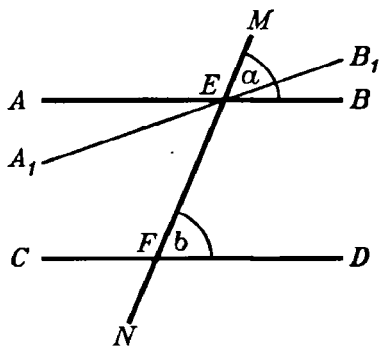


Рис. 79.

Докажем, например, что если $AB \parallel CD$, то соответственные углы a и b равны.

Предположим противное, т.е. что эти углы не равны (например, пусть $\angle a > \angle b$). Построив $\angle MEB_1 = \angle b$, мы обязательно получим тогда прямую A_1B_1 , не сливающуюся с AB , и, следовательно, будем иметь две различные прямые, проходящие через точку E и параллельные одной и той же прямой CD , именно: $AB \parallel CD$, согласно усло-

вию теоремы, и $A_1B_1 \parallel CD$ вследствие равенства соответственных углов MEB_1 и b . Так как это противоречит аксиоме параллельных линий, то наше предположение, что углы a и b не равны, должно быть ошибочно; остается принять, что $\angle a = \angle b$.

Таким же путем можно доказать и остальные заключения теоремы. Из доказанных выше предложений непосредственно вытекает следующая теорема.

Перпендикуляр к одной из двух параллельных прямых есть также перпендикуляр и к другой.

Действительно, если $AB \parallel CD$ (рис. 80) и $ME \perp AB$, то, во-первых, ME , пересекаясь с AB , пересекается и с CD в некоторой точке F , во-вторых, соответственные углы a и b равны. Но угол a прямой, значит, и угол b прямой, т.е. $ME \perp CD$.

78. Признаки непараллельности прямых. Из двух теорем: прямой (§ 73) и ей обратной (§ 77) можно вывести заключение, что противоположные теоремы также верны, т.е.:

Если при пересечении двух прямых третьей окажется, что: 1) соответственные углы не равны или 2) внутренние накрест лежащие углы не равны и т. д., то прямые

не параллельны; если две прямые не параллельны, то при пересечении их третьей прямой: 1) соответственные углы не равны; 2) внутренние накрест лежащие углы не равны и т. д.

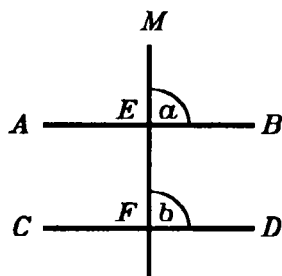


Рис. 80.

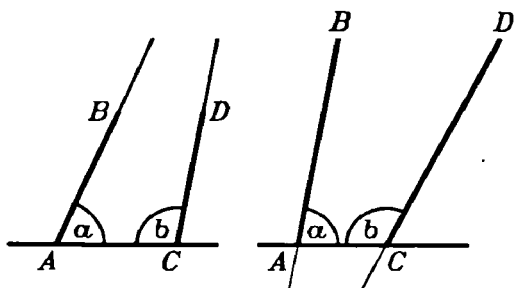


Рис. 81.

Из этих признаков непараллельности (легко доказываемых способом от противного) полезно обратить внимание на следующий:

если сумма внутренних односторонних углов (α и b , рис. 81) не равна $2d$, то прямые (AB и CD) при достаточном продолжении пересекаются, так как если бы эти прямые не пересекались, то они были бы параллельны, и тогда сумма внутренних углов равнялась бы $2d$, что противоречит условию.

Это предложение (дополненное утверждением, что прямые пересекутся по ту сторону от секущей линии, по которой

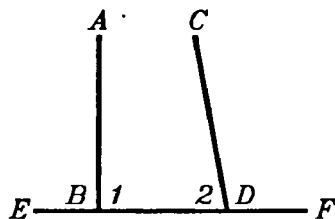


Рис. 82.

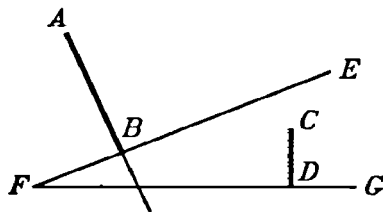


Рис. 83.

сумма внутренних односторонних углов меньше $2d$) было принято знаменитым греческим геометром Евклидом (жившим в III веке до начала нашей эры) в его «Началах» геометрии без доказательства как аксиома параллельных линий, и потому оно известно под именем постулата Евклида. В настоящее время предпочитают принимать за такую аксиому более простое предложение (§ 75). Укажем еще два сле-

дующих признака параллельности, которые понадобятся нам впоследствии:

1) *Перпендикуляр (AB, рис. 82) и наклонная (CD) к одной и той же прямой (EF) пересекаются, потому что сумма внутренних односторонних углов 1 и 2 не равна $2d$.*

2) *Две прямые (AB и CD, рис. 83), перпендикулярные к двум пересекающимся прямым (FE и FG), пересекаются.*

Действительно, если предположим противное, т.е. что $AB \parallel CD$, то прямая FD , будучи перпендикулярна к одной из параллельных (к CD), была бы перпендикулярна и к другой параллельной (к AB), и тогда из одной точки F к прямой AB были бы проведены два перпендикуляра: FB и FD , что невозможно.

Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами

79. Теорема. *Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют два прямых.*

Рассмотрим особо следующие три случая (рис. 84).

1) Пусть стороны угла 1 соответственно параллельны сторонам угла 2 и, сверх того, имеют одинаковое направление от вершины (на рисунке эти направления указаны стрелками).

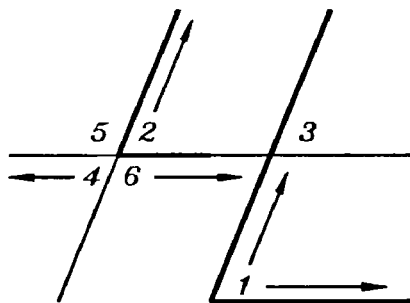


Рис. 84.

Продолжив одну из сторон угла 2 до пересечения с непараллельной ей стороной угла 1, мы получим угол 3, равный и углу 1, и углу 2 (как соответственные при параллельных прямых); следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

2) Пусть стороны угла 1 соответственно параллельны сторонам угла 4, но имеют противоположное направление от вершины.

Продолжив обе стороны угла 4, мы получим угол 2, который равен углу 1 (по доказанному выше) и углу 4 (как вертикальный ему); следовательно, $\angle 4 = \angle 1$.

3) Пусть, наконец, стороны угла 1 соответственно параллельны сторонам углов 5 и 6, причем две из этих сторон

имеют одинаковое направление, а две другие — противоположное.

Продолжив одну сторону угла 5 или угла 6, мы получим угол 2, который равен (по доказанному) углу 1; но $\angle 5$ (или $\angle 6$) + $\angle 2 = \angle 2d$ (по свойству смежных углов); следовательно, и $\angle 5$ (или $\angle 6$) + $\angle 1 = 2d$.

Таким образом, углы с параллельными сторонами оказываются равными, когда их стороны имеют или одинаковое, или противоположное направление от вершины; если же это условие не выполнено, то углы составляют в сумме $2d$.

З а м е ч а н и е. Можно было бы сказать, что углы с параллельными сторонами равны тогда, когда они оба острые или оба тупые; но бывают случаи, когда по виду углов трудно определить, острые ли они или тупые; поэтому приходится сравнивать направления сторон углов.

80. Теорема. Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны к сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют два прямых.

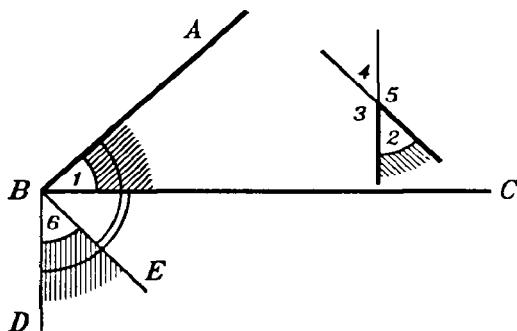


Рис. 85.

Пусть угол ABC , обозначенный цифрой 1 (рис. 85), есть один из данных углов, за другой данный угол возьмем какой-нибудь из четырех углов; 2, 3, 4 или 5, образованных двумя пересекающимися прямыми, из которых одна перпендикулярна к стороне AB , а другая — к стороне BC (общая вершина их может находиться в любой точке плоскости).

Проведем из вершины угла 1 две вспомогательные прямые: $BD \perp BC$ и $BE \perp BA$. Образованный ими угол 6 равен углу 1 по следующей причине: углы DBC и EBA равны, так как оба они прямые; отняв от каждого из них по одному и тому же углу EBC , получим: $\angle 6 = \angle 1$. Теперь заметим, что

стороны вспомогательного угла 6 параллельны пересекающимся прямым, образующим углы 2, 3, 4 и 5 (потому что два перпендикуляра к одной прямой параллельны, § 71), следовательно, эти углы или равны углу 6, или составляют с ним в сумме $2d$. Заменяя угол 6 равным углом 1, получим то, что требовалось доказать.

Сумма углов треугольника и многоугольника

81. Теорема. *Сумма углов треугольника равна двум прямым.*

Пусть ABC (рис. 86) — какой-нибудь треугольник; требуется доказать, что сумма углов A , B и C равна $2d$, т. е. 180° .

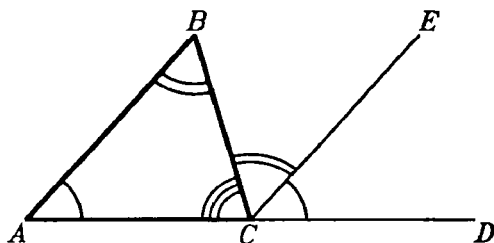


Рис. 86.

Продолжив сторону AC и проведя $CE \parallel AB$, найдем: $\angle A = \angle ECD$ (как углы соответственные при параллельных), $\angle B = \angle BCE$ (как углы, накрест лежащие при параллельных); следовательно,

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle ECD + \angle BCE + \angle C = 2d = 180^\circ.$$

Следствия. 1) *Всякий внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним (так, $\angle BCD = \angle A + \angle B$).*

2) *Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то и третьи углы равны.*

3) *Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна одному прямому углу, т. е. 90° .*

4) *В равнобедренном прямоугольном треугольнике каждый острый угол равен $1/2d$, т. е. 45° .*

5) *В равностороннем треугольнике каждый угол равен $2/3d$, т. е. 60° .*

6) Если в прямоугольном треугольнике ABC (рис. 87) один из острых углов (например, $\angle B$) равен 30° , то лежащий против него катет составляет половину гипотенузы.

Заметив, что в таком треугольнике другой острый угол равен 60° , пристроим к треугольнику ABC другой треугольник ABD , равный данному. Тогда мы получим треугольник DBC , у которого каждый угол равен 60° . Такой равноугольный треугольник должен быть равносторонний (§ 47), и потому $DC=BC$. Но $AC = \frac{1}{2} DC$; значит, $BC = \frac{1}{2} DC$.

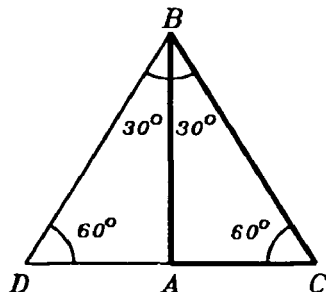


Рис. 87.

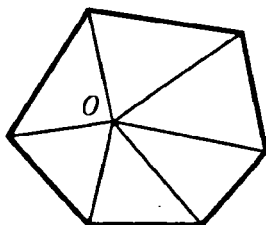


Рис. 88.

Предоставляем самим учащимся доказать обратное предложение: если катет равен половине гипотенузы, то противолежащий ему острый угол равен 30° .

82. Теорема. Сумма углов выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, равна двум прямым, повторенным $n-2$ раза.

Взяв внутри выпуклого многоугольника (рис. 88) произвольную точку O , соединим ее со всеми вершинами. Тогда выпуклый многоугольник разобьется на столько треугольников, сколько в нем сторон. Сумма углов каждого треугольника равна $2d$; следовательно, сумма углов всех треугольников равна $2dn$, если n означает число сторон многоугольника. Эта величина, очевидно, превышает сумму всех тех углов, которые расположены вокруг точки O ; но эта сумма равна $4d$; следовательно, сумма углов многоугольника равна:

$$2dn - 4d = 2d(n-2) = 180^\circ (n-2).$$

Замечание. Эту теорему можно доказать еще и так. Из вершины какого-нибудь выпуклого многоугольника проведем его диагонали (рис. 89). Тогда многоугольник разобьется

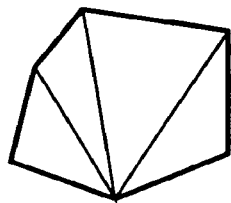


Рис. 89.

ся на столько треугольников, сколько в многоугольнике сторон без двух. Действительно, если не будем считать двух сторон, образующих угол, из вершины которого проведены диагонали, то на каждую из остальных сторон придется по одному треугольнику. Значит, всех треугольников будет $n-2$, где n означает число всех сторон многоугольника. Но в каждом треугольнике сумма углов равна $2d$; значит, сумма углов всех треугольников будет $2d(n-2)$; но эта сумма и есть сумма всех углов многоугольника.

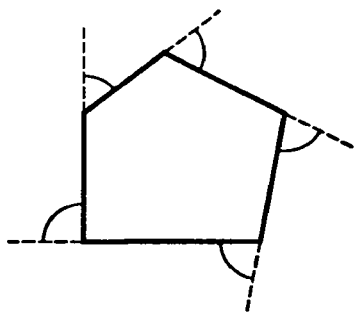


Рис. 90.

Примечание. Доказанная теорема верна и для вогнутых многоугольников. При этом, если внутри многоугольника можно найти такую точку, что отрезки прямых, соединяющие ее с вершинами многоугольника, лежат внутри него, то теорему можно доказать, повторяя дословно те рассуждения, которые мы приводили выше при первом способе доказательства. Если же такой точки найти нельзя, то следует весь многоугольник разбить на выпуклые многоугольники, проведя некоторые его диагонали, а затем подсчитать сумму углов

в каждом из них и все эти суммы сложить. В результате получим ту же формулу $2dn-4d$. Этот подсчет мы предоставляем произвести самому читателю.

83. Теорема. *Если из вершины каждого угла выпуклого многоугольника проведем продолжение одной из сторон этого угла, то сумма всех образовавшихся при этом внешних углов многоугольника равна четырем прямым (независимо от числа сторон многоугольника).*

Каждый из внешних углов (рис. 90) составляет дополнение до $2d$ к смежному с ним внутреннему углу многоугольника; следовательно, если к сумме всех внутренних углов прибавим сумму всех внешних углов, то получим $2dn$ (где n — число сторон); но сумма внутренних углов, как мы видели, равна $2dn-4d$; следовательно, сумма внешних углов равна разности: $2dn-(2dn-4d)=2dn-2dn+4d=4d=360^\circ$.

Центральная симметрия

84. В § 37 был рассмотрен случай симметричного расположения двух равных фигур относительно прямой. Выведенные выше свойства параллельных прямых позволяют изучить еще один замечательный вид расположения двух равных

нию к некоторой точке на плоскости.

Если две какие-нибудь точки A и A' (рис. 91) расположены на одной прямой с точкой O по разные стороны от нее и на одинаковом от нее расстоянии ($OA=OA'$), то такие точки называются симметричными относительно точки (O).

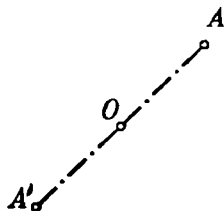


Рис. 91.

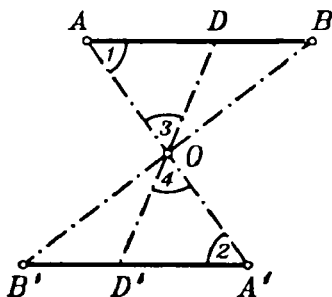


Рис. 92.

Чтобы построить точку, симметричную с данной точкой A относительно другой данной точки O , следует соединить точки A и O прямой, продолжить эту прямую за точку O и отложить на ней от точки O отрезок OA' , равный OA , таким образом, чтобы точки A и A' были расположены по разные стороны относительно точки O . Точка A' будет искомой.

85. Теорема. Если для двух точек (A и B) какой-либо прямой (AB) построить симметричные им точки (A' и B') относительно некоторой точки O , то:

1) Прямая, соединяющая точки A' и B' , будет параллельна данной прямой (AB), причем отрезок (AB) равен отрезку ($A'B'$).

2) Каждой точке данной прямой (AB) соответствует симметричная ей точка на построенной прямой ($A'B'$).

Доказательство. 1) Треугольники AOB и $A'O'B'$ равны (рис. 92), потому что у них $AO=A'O$ и $BO=B'O$ (по построению), $\angle AOB=\angle A'O'B'$ (как вертикальные углы). Из равенства этих треугольников следует: $AB=A'B'$ и $\angle OAB=\angle OA'B'$, значит, $AB \parallel A'B'$ (§ 73, 2-й случай).

2) Возьмем на прямой AB какую-либо точку D (рис. 92). Рассмотрим прямую, соединяющую точку D с точкой O . Эта прямая пересечет прямую $A'B'$ в некоторой точке D' . Треугольники AOD и $A'OD'$ равны, потому что у них $AO=A'O$, $\angle 1=\angle 2$ (как накрест лежащие при параллельных прямых) и

$\angle 3 = \angle 4$ (как вертикальные). Из равенства этих треугольников следует: $OD = OD'$. Значит, точки D и D' симметричны относительно точки O .

86. Симметричные фигуры. *Две фигуры называются симметричными относительно данной точки O , если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей точка другой фигуры.*

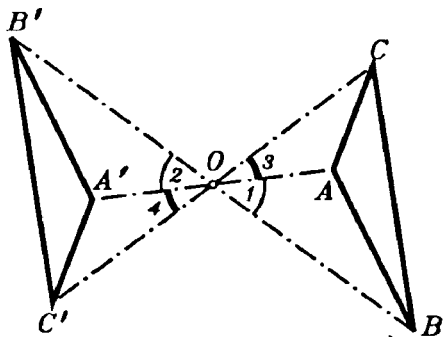


Рис. 93.

Точка O называется **центром симметрии** данных фигур. Сама симметрия называется **центральной** в отличие от **осевой**, с которой мы уже встречались раньше (§ 37). Если каждой точке данной фигуры соответствует симметричная ей точка той же самой фигуры (относительно некоторого центра), то говорят, что данная фигура

имеет центр симметрии. Примером такой фигуры служит окружность. Центром ее симметрии является ее центр.

Каждую фигуру можно совместить с фигурой, ей симметричной, путем вращения ее вокруг центра симметрии. В самом деле, возьмем, например, два треугольника ABC и $A'B'C'$ (рис. 93), симметричные относительно некоторого центра O . Всю фигуру $OABC$, не отрывая от плоскости, будем вращать вокруг точки O как вокруг центра до тех пор, пока прямая OA не пойдет по OA' .

Так как $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, то прямая OB пойдет по OB' , а прямая OC по OC' .

Так как $OA = OA'$, $OB = OB'$, $OC = OC'$, то точка A совпадет с A' , точка B с B' и точка C с C' . Таким образом, треугольник ABC совместится с треугольником $A'B'C'$.

Очевидно, что при таком повороте каждая прямая OA , OB , OC , а также каждая сторона треугольника ABC повернется на 180° . Если фигура имеет центр симметрии, то после поворота ее вокруг центра симметрии на 180° эта фигура совместится сама с собой.

Замечание. При вращении, которое мы произвели для совмещения треугольников ABC и $A'B'C'$, треугольник ABC скользил по плоскости. Таким образом, фигуры, симметричные относительно центра, можно совместить, не выводя их из плоскости. Этим центральная симметрия существен-

но отличается от осевой (§ 37), где для совмещения симметричных фигур необходимо было одну из них перевернуть другой стороной.

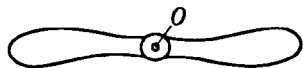


Рис. 94.

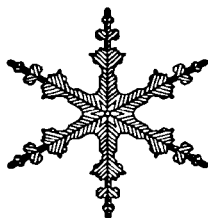


Рис. 95.

Центральная симметрия фигур, так же как и осевая, весьма часто встречается в природе и в обыденной жизни. На рисунке 94 приведено изображение пропеллера самолета. Оно имеет центром симметрии точку O . На рисунке 95 дано изображение снежинки, оно также обладает центром симметрии.

VI. ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ И ТРАПЕЦИИ

Параллелограммы

87. Параллелограмм. Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется **параллелограммом**. Такой четырехугольник ($ABCD$, рис. 96) получится, например, если какие-нибудь две параллельные прямые KL и MN пересечем двумя другими параллельными прямыми RS и PQ .

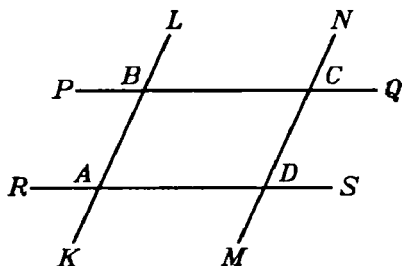


Рис. 96.

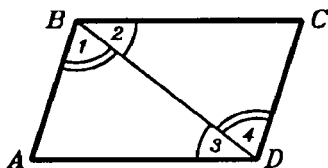


Рис. 97.

88. Теорема (выражающая свойство сторон и углов параллелограмма). *Во всяком параллелограмме противо-*

ложные стороны равны, противоположные углы равны и сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна $2d$ (рис. 97).

Проведя диагональ BD , мы получим два треугольника: ABD и BCD , которые равны, потому что у них BD — общая сторона, $\angle 1 = \angle 4$ и $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие при параллельных прямых). Из равенства треугольников следует: $AB = CD$, $AD = BC$ и $\angle A = \angle C$. Противоположные углы B и D также равны, так как они представляют собой суммы равных углов.

Наконец, углы, прилежащие к одной стороне, например углы A и D , дают в сумме $2d$, так как это углы внутренние односторонние при параллельных прямых.

Замечание. Равенство противоположных сторон параллелограмма иногда кратко выражают другими словами, так *отрезки параллельных, отсекаемые параллельными, равны*.

Следствие. Если две прямые параллельны, то все точки каждой из них одинаково удалены от другой параллельной; короче: параллельные прямые (AB и CD , рис. 98) везде одинаково удалены одна от другой.

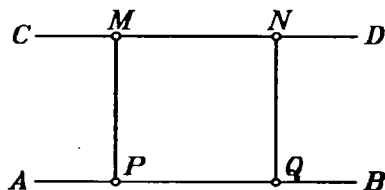


Рис. 98.

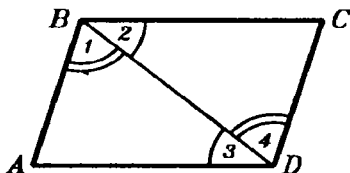


Рис. 99.

Действительно, если из каких-нибудь двух точек M и N прямой CD опустим на AB перпендикуляры MP и NQ , то эти перпендикуляры параллельны (§ 71), и потому фигура $MNPQ$ — параллелограмм; отсюда следует, что $MP = NQ$, т. е. точки M и N одинаково удалены от прямой AB .

89. Два признака параллелограммов.

Теорема. Если в выпуклом четырехугольнике:

- 1) противоположные стороны равны между собой или
- 2) две противоположные стороны равны и параллельны, то такой четырехугольник есть параллелограмм.

1) Пусть фигура $ABCD$ (рис. 99) есть четырехугольник, у которого:

$$AB = CD \text{ и } BC = AD.$$

Требуется доказать, что эта фигура параллелограмм, т. е. что $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$.

Проведя диагональ BD , мы получим два треугольника, которые равны, так как у них BD — общая сторона, $AB=CD$ и $BC=AD$ (по условию). Из равенства этих треугольников следует: $\angle 1=\angle 4$ и $\angle 2=\angle 3$ (в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы); вследствие этого $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$ (если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны).

2) Пусть в четырехугольнике ($ABCD$, рис. 99) $BC \parallel AD$ и $BC=AD$. Требуется доказать, что $ABCD$ есть параллелограмм, т. е. что $AB \parallel CD$.

Треугольники ABD и BCD равны, потому что у них BD — общая сторона, $BC=AD$ (по условию) и $\angle 2=\angle 3$ (как накрест лежащие углы при параллельных прямых). Из равенства треугольников следует: $\angle 1=\angle 4$; поэтому $AB \parallel CD$.

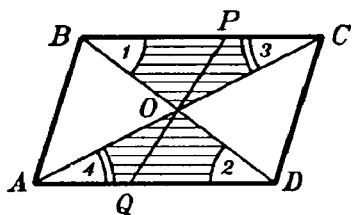


Рис. 100.

90. Теорема (выражающая свойство диагоналей параллелограмма). *Если четырехугольник ($ABCD$, рис. 100) — параллелограмм, то его диагонали, пересекаясь, делятся пополам.*

Обратно: *если в четырехугольнике диагонали точкой их пересечения делятся пополам, то данный четырехугольник — параллелограмм.*

1) Треугольники BOC и AOD равны, потому что у них: $BC=AD$ (как противоположные стороны параллелограмма), $\angle 1=\angle 2$ и $\angle 3=\angle 4$ (как накрест лежащие при параллельных прямых). Из равенства треугольников следует: $OC=OA$ и $OB=OD$.

2) Если $AO=OC$ и $BO=OD$, то треугольники AOD и BOC равны (по двум сторонам и углу между ними). Из равенства треугольников следует: $\angle 1=\angle 2$ и $\angle 3=\angle 4$. Следовательно $BC \parallel AD$ (углы накрест лежащие равны) и $BC=AD$; поэтому фигура $ABCD$ есть параллелограмм.

91. Центр симметрии параллелограмма. *Параллелограмм имеет центр симметрии, причем центром симметрии служит точка пересечения диагоналей (рис. 100). Действительно, так как $BO=OD$ и $OC=OA$, то отрезки BC и AD симметричны относительно точки O и каждой точке P отрезка BC соответствует симметричная ей точка Q отрезка AD*

(§ 85). Таким же образом убеждаемся, что отрезки AB и CD симметричны относительно той же точки O . Если параллелограмм повернуть вокруг точки пересечения его диагоналей на 180° , то новое положение диагоналей параллелограмма совпадет с первоначальным. При этом каждая из его вершин поменяется местом с противоположной вершиной (на рис. 100 вершина A с C и B с D).

Некоторые частные виды параллелограммов: прямоугольник, ромб, квадрат

92. Прямоугольник и его свойства. Если один из углов параллелограмма прямой, то три остальных его угла также прямые (§ 88). Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется прямоугольником.

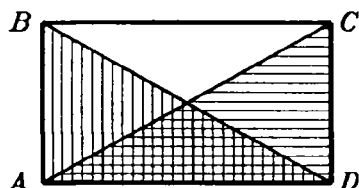


Рис. 101.

Так как прямоугольник есть параллелограмм, то он обладает всеми свойствами параллелограмма; например, диагонали его делятся пополам и точка их пересечения есть центр симметрии. Но у прямоугольника есть еще свои особые свойства.

1) В прямоугольнике ($ABCD$, рис. 101) диагонали равны.

Прямоугольные треугольники ACD и ABD равны, потому что у них: AD — общий катет и $AB=CD$ (как противоположные стороны параллелограмма). Из равенства треугольников следует: $AC=BD$.

2) Прямоугольник имеет две оси симметрии. Именно, каждая прямая, проходящая через центр симметрии прямоугольника и параллельная двум его противоположным сторонам, есть ось симметрии. Оси симметрии прямоугольника перпендикулярны между собой (см. рис. 102).

93. Ромб и его свойства. Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется ромбом. Конечно, ему принадлежат все свойства параллелограмма, но у него есть следующие два особых свойства:

1) Диагонали ромба ($ABCD$, рис. 103) взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам.

Треугольники ABO и BCO равны, потому что у них: BO — общая сторона, $AB=BC$ (так как у ромба все стороны

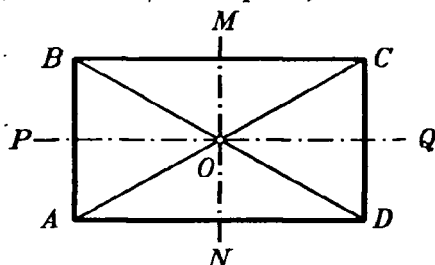


Рис. 102.

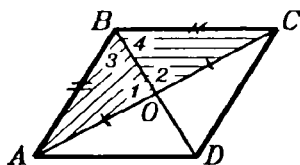


Рис. 103.

равны) и $AO=OC$ (так как диагонали всякого параллелограмма делятся пополам). Из равенства треугольников следует:

$$\angle 1 = \angle 2, \text{ т. е. } BD \perp AC \text{ и } \angle 3 = \angle 4,$$

т. е. угол B делится диагональю пополам. Из равенства треугольников BOC и COD заключаем, что угол C делится диагональю пополам, и т. д.

2) *Каждая диагональ ромба есть его ось симметрии.*

Диагональ BD (рис. 104) есть ось симметрии ромба $ABCD$, потому что, вращая $\triangle ABD$ вокруг BD , мы можем совместить его с $\triangle BCD$. В самом деле диагональ BD делит углы B и D пополам и, кроме того, $AB=BC$ и $AD=CD$.

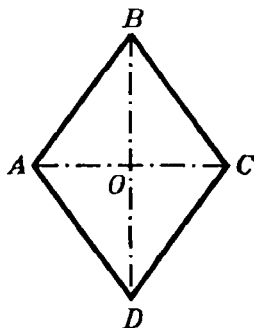


Рис. 104.

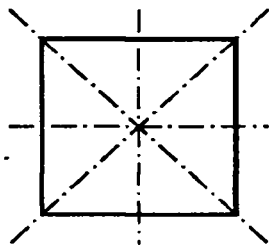


Рис. 105.

То же самое можно сказать о диагонали AC .

94. Квадрат и его свойства. Квадратом называется параллелограмм, у которого все стороны равны и все углы прямые; можно также сказать, что квадрат — это прямоугольник, у которого стороны равны, или ромб, у которого углы прямые. Поэтому квадрату принадлежат все свойства парал-

лелограмма, прямоугольника и ромба. Например, у квадрата имеется четыре оси симметрии (рис. 105): две, проходящие через середины противоположных сторон (как у прямоугольника), и две, проходящие через вершины противоположных углов (как у ромба).

Некоторые теоремы, основанные на свойствах параллелограмма

95. Теорема. Если на одной стороне угла (например, на стороне BC угла ABC , рис. 106) отложим равные между собой отрезки ($DE=EF=...$) и через их концы проведем параллельные прямые ($DM, EN, FP, ...$) до пересечения с другой стороной угла, то на этой стороне отложатся равные между собой отрезки ($MN=NP=...$).

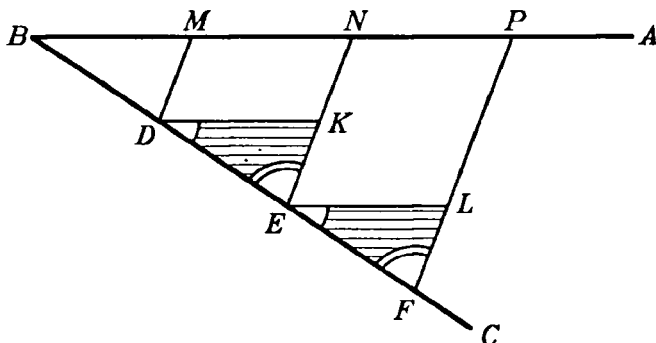


Рис. 106.

Проведем вспомогательные прямые DK и EL , параллельные AB . Полученные при этом треугольники DKE и ELF равны, так как у них: $DE=EF$ (по условию), $\angle KDE=\angle LEF$ и $\angle KED=\angle LFE$ (как углы соответственные при параллельных прямых). Из равенства этих треугольников следует: $DK=EL$. Но $DK=MN$ и $EL=NP$ (как противоположные стороны параллелограммов); значит, $MN=NP$.

Замечание. Равные отрезки могут быть откладываемы и от вершины угла B , т. е. так: $BD=DE=EF=...$ Тогда и на другой стороне равные отрезки надо считать от вершины угла, т. е. так: $BM=MN=NP=...$

96. Следствие. Прямая (DE , рис. 107), проведенная через середину стороны (AB) треугольника параллельно другой его стороне (AC), делит третью сторону (BC) пополам.

Действительно, мы видим, что на стороне угла B отложены равные отрезки $BD=DA$ и через точки деления D и A проведены параллельные прямые DE и AC до пересечения со стороной BC ; значит, по доказанному, на этой стороне тоже отложатся равные отрезки $BE=EC$, и потому BC разделится в точке E пополам.

Замечание. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется его *средней линией*.

97. Теорема (выражающая свойство средней линии треугольника). *Прямая (DE , рис. 107), проведенная через середины двух сторон треугольника, параллельна третьей его стороне; отрезок этой прямой, лежащий внутри треугольника, равен половине третьей стороны.*

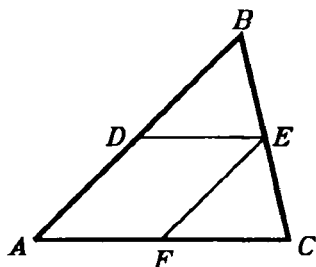


Рис. 107.

Для доказательства вообразим, что через середину D стороны AB мы провели прямую, параллельную стороне AC . Тогда, по доказанному в предыдущем параграфе, эта прямая разделит сторону BC пополам и, следовательно, сольется с прямой DE , соединяющей середины сторон AB и BC .

Проведя еще $EF \parallel AD$, найдем, что сторона AC также разделится пополам в точке F ; значит, $AF=FC$ и, кроме того, $AF=DE$ (как противоположные стороны параллелограмма $ADEF$), откуда следует: $DE = \frac{1}{2} AC$.

Трапеции

98. Четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется **трапецией**. Параллельные стороны трапеции (AD и BC) называются ее **основаниями**, непараллельные (AB и CD) — **боковыми сторонами** (рис. 108). Если боковые стороны равны, трапеция называется **равнобокой**.

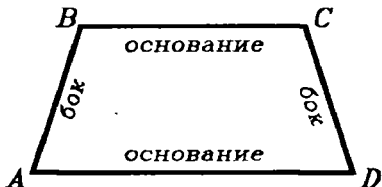


Рис. 108.

99. Свойство средней линии трапеции. Прямая, соединяющая середины боковых сторон трапеции, называется ее **средней линией**. Линия эта обладает следующим свойством.

Теорема. Средняя линия (EF , рис. 109) трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Через точки B и F проведем прямую до пересечения с продолжением стороны AD в некоторой точке G . Тогда получим два треугольника: BCF и DFG , которые равны, так как у них: $CF=FD$ (по условию), $\angle BFC=\angle DFG$ (как углы вертикальные) и $\angle BCF=\angle FDG$ (как углы накрест лежащие при параллельных прямых). Из равенства этих треугольников следует: $BF=FG$ и $BC=DG$. Теперь видим, что в треугольнике ABG прямая EF соединяет середины двух сторон; значит (§ 97), $EF \parallel AG$ и $EF = \frac{1}{2}(AD+DG)$; другими словами, $EF \parallel AD$ и $EF = \frac{1}{2}(AD+BC)$.

100. Задача. Данный отрезок прямой (AB , рис. 110) разделить на данное число равных частей (например, на 3).

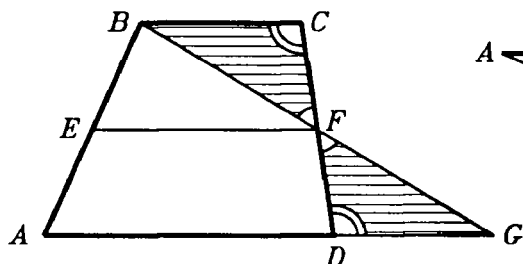


Рис. 109.

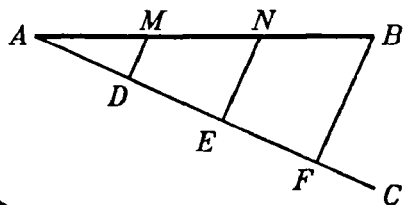


Рис. 110.

Из конца A проводим прямую AC , образующую с AB какой-нибудь угол; откладываем на AC от точки A три произвольной величины и равные между собой отрезка: AD , DE и EF ; точку F соединяем с B ; наконец, из E и D проводим прямые EN и DM , параллельные FB . Тогда отрезок AB , по доказанному, разделится в точках M и N на три равные части.

Задачи на построение

101. Метод параллельного перенесения. На применении свойств параллелограмма основан особый прием решения задач на построение, известный под названием метода параллельного перенесения. Его сущность лучше всего выяснить на примере.

Задача. Построить четырехугольник $ABCD$ (рис. 111), зная все его стороны и отрезок EF , соединяющий середины противоположных сторон.

Чтобы сблизить между собой данные линии, перенесем параллельно самим себе стороны AD и BC в положения ED_1 и EC_1 . Тогда сторона DD_1 будет равна и параллельна AE , а сторона CC_1 равна и параллельна BE ; но так как $AE=BE$, то $DD_1=CC_1$ и $DD_1 \parallel CC_1$. Вследствие этого треугольники DD_1F и CC_1F будут равны (так как у них: $DD_1=CC_1$, $DF=FC$ и $\angle D_1DF=\angle FCC_1$); значит, $\angle D_1FD=\angle CFF_1$, и потому линия D_1FC_1 должна быть прямая, т. е. фигура ED_1FC_1 окажется треугольником. В этом треугольнике известны две стороны ($ED_1=AD$ и $EC_1=BC$) и медиана EF , проведенная к третьей стороне. По этим данным легко построить треугольник ED_1C_1 (если на продолжении медианы EF за точку F отложим отрезок, равный EF , и полученную точку соединим с D_1 и C_1 , то получим параллелограмм, у которого известны стороны и одна диагональ).

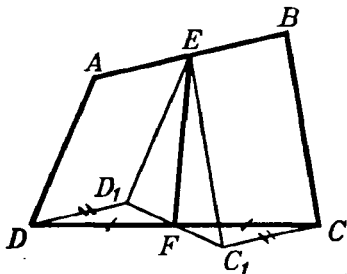


Рис. 111.

Найдя $\triangle ED_1C_1$, строим затем треугольники D_1DF и C_1CF , а затем и весь четырехугольник $ABCD$.

Предоставляем самим учащимся с помощью этого метода решить следующие задачи:

1. Построить трапецию по одному ее углу, двум диагоналям и средней линии.
2. Построить четырехугольник по трем сторонам a , b , c и двум углам α и β , прилежащим к известной стороне.
3. Построить трапецию по четырем данным ее сторонам.

102. Метод симметрии. Свойства осевой симметрии также могут быть использованы при решении задач на построение. Иногда искомый прием построения легко обнаруживается, если перегнем часть чертежа вокруг некоторой прямой так, чтобы эта часть заняла симметричное положение по другую сторону от этой прямой. Приведем пример.

Задача. На прямой AB (рис. 112) найти точку x , чтобы сумма ее расстояний от данных точек M и N была наименьшая.

Если, перегнув чертеж вокруг AB , приведем точку M в симметричное относительно AB положение M_1 , то расстояние точки M от какой угодно точки прямой AB равно расстоянию точки M_1 от той же точки прямой AB . Поэтому суммы

$Mx+xN$, Mx_1+x_1N ... равны соответственно суммам M_1x+xN , $M_1x_1+x_1N$...; но из последних сумм наименьшая будет та, при которой линия M_1xN — прямая. Отсюда становится ясным прием построения.

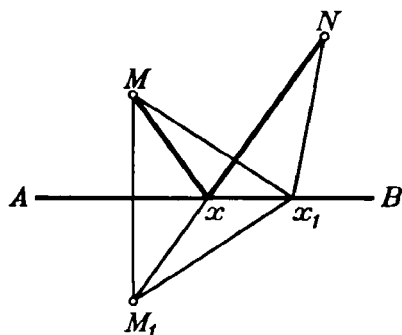


Рис. 112.

То же самое построение решает и другую задачу: на прямой AB найти такую точку x , чтобы прямые xM и xN , проведенные от нее к данным точкам M и N , составляли с AB равные углы.

Предоставляем учащимся решить методом симметрии следующие задачи:

1. Построить по четырем сторонам четырехугольник $ABCD$, зная, что его диагональ AC делит угол A пополам.

2. На прямоугольном бильярде дано положение двух шаров A и B . В каком направлении надо толкнуть шар A , чтобы он, отразившись последовательно от всех четырех бортов, ударил затем шар B ?

3. Дан угол и внутри него точка. Построить треугольник наименьшего периметра, такой, чтобы одна его вершина лежала в данной точке, а две другие на сторонах угла.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать теоремы

1. Соединив последовательно середины сторон какого-нибудь четырехугольника, получим параллелограмм.

2. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

Указание. Следует продолжить медиану на расстояние, равное ее длине.

3. Обратно: если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

4. В прямоугольном треугольнике медиана и высота, проведенные к гипотенузе, образуют угол, равный разности острых углов треугольника.

Указание. См. задачу 2.

5. В $\triangle ABC$ биссектриса угла A встречается сторону BC в точке D ; прямая, проведенная из D параллельно CA , встреча-

ет AB в точке E ; прямая, проведенная из E параллельно BC , встречает AC в F . Доказать, что $EA=FC$.

6. Внутри данного угла построен другой угол, стороны которого параллельны сторонам данного и равно отстоят от них. Доказать, что биссектриса построенного угла лежит на биссектрисе данного угла.

7. Всякая прямая, соединяющая какую-нибудь точку нижнего основания трапеции с какой-нибудь точкой верхнего основания, делится средней линией пополам.

8. В треугольнике через точку пересечения биссектрис углов, прилежащих к основанию, проведена прямая параллельно основанию. Доказать, что отрезок прямой, заключенный между боковыми сторонами треугольника, равен сумме отрезков боковых сторон, считая их от основания.

9. Через вершины углов треугольника проведены прямые, параллельные противоположным сторонам. Доказать, что образованный ими треугольник составлен из четырех треугольников, равных данному, и что каждая его сторона в два раза больше соответствующей стороны данного треугольника.

10. В равнобедренном треугольнике сумма расстояний каждой точки основания от боковых сторон есть величина постоянная, а именно: она равна высоте, опущенной на боковую сторону.

11. Как изменится эта теорема, если взять точку на продолжении основания?

12. В равностороннем треугольнике сумма расстояний всякой точки, взятой внутри треугольника, до сторон его есть величина постоянная, равная высоте треугольника.

13. Всякий параллелограмм, у которого диагонали равны, есть прямоугольник.

14. Всякий параллелограмм, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, есть ромб.

15. Всякий параллелограмм, у которого диагональ делит угол пополам, есть ромб.

16. Из точки пересечения диагоналей ромба опущены перпендикуляры на стороны ромба. Доказать, что основания этих перпендикуляров суть вершины прямоугольника.

Указание. См. задачу 13.

17. Биссектрисы углов прямоугольника своим пересечением образуют квадрат.

18. Пусть A' , B' , C' и D' будут середины сторон CD , DA , AB и BC квадрата. Доказать, что отрезки AA' , CC' , DD' и BB'

образуют своим пересечением квадрат, сторона которого равна $\frac{2}{5}$ каждого из этих отрезков.

19. Дан квадрат $ABCD$. На сторонах его отложены равные части AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 . Точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 соединены последовательно прямыми. Доказать, что $A_1B_1C_1D_1$ есть квадрат.

20. Если середины сторон какого угодно четырехугольника взять за вершины нового четырехугольника, то последний есть параллелограмм. Определить, при каких условиях этот параллелограмм будет: 1) прямоугольником; 2) ромбом; 3) квадратом.

Найти геометрические места

21. Середин всех отрезков, проведенных из данной точки к различным точкам данной прямой.

22. Точек, равно отстоящих от двух параллельных прямых.

23. Вершины треугольников, имеющих общее основание и равные высоты.

Задачи на построение

24. Даны два угла треугольника; построить третий.

25. Дан острый угол прямоугольного треугольника; построить другой острый угол.

26. Провести прямую, параллельную данной прямой и находящуюся от нее на данном расстоянии.

27. Разделить пополам угол, вершина которого не помещается на чертеже.

28. Через данную точку провести прямую под данным углом к данной прямой.

29. Даны две прямые XU и $X'U'$ и точка P ; провести через эту точку такую секущую, чтобы часть ее, заключенная между данными прямыми, делилась точкой P пополам.

30. Через данную точку провести прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между двумя данными параллельными прямыми, равнялся данному отрезку.

31. Между сторонами данного острого угла поместить отрезок прямой данной длины так, чтобы он был перпендикулярен к одной стороне угла.

32. Между сторонами данного угла поместить отрезок прямой данной длины параллельно заданной прямой, пересекающей обе стороны данного угла.

33. Между сторонами данного угла поместить отрезок данной длины так, чтобы он отсекал от сторон угла равные отрезки.

34. Построить прямоугольный треугольник по данным: острому углу и противолежащему катету.

35. Построить треугольник по двум углам и стороне, лежащей против одного из них.

36. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и основанию.

37. То же — по углу при основании и высоте, опущенной на боковую сторону.

38. То же — по боковой стороне и высоте, опущенной на нее.

39. Построить равносторонний треугольник по его высоте.

40. Разделить прямой угол на три равные части (другими словами, построить угол, равный $\frac{1}{3}d=30^\circ$).

41. Построить треугольник по основанию, высоте и боковой стороне.

42. То же — по основанию, высоте и углу при основании.

43. То же — по углу и двум высотам, опущенным из стороны этого угла.

44. То же — по стороне, сумме двух других сторон и высоте, опущенной на одну из этих сторон.

45. То же — по высоте, периметру и углу при основании.

46. Провести в треугольнике прямую, параллельную основанию, так, чтобы отрезок, заключенный между боковыми сторонами, был равен сумме отрезков боковых сторон, считая от основания.

47. Построить многоугольник, равный данному.

У к а з а н и е. Диагоналями разбивают данный многоугольник на треугольники.

48. Построить четырехугольник по трем его углам и двум сторонам, образующим четвертый угол.

У к а з а н и е. Найти четвертый угол.

49. То же — по трем сторонам и двум диагоналям.

50. Построить параллелограмм по двум неравным сторонам и одной диагонали.

51. То же — по стороне и двум диагоналям.

52. То же — по двум диагоналям и углу между ними.

53. То же — по основанию, высоте и диагонали.

54. Построить прямоугольник по диагонали и углу между диагоналями.

55. Построить ромб по стороне и диагонали.

56. То же — по двум диагоналям.

57. То же — по высоте и диагонали.

58. То же — по углу и диагонали, проходящей через этот угол.

59. То же — по диагонали и противолежащему углу.

60. То же — по сумме диагоналей и углу, образованному диагональю со стороной.

61. Построить квадрат по данной диагонали.

62. Построить трапецию по основанию, прилежащему к нему углу и двум непараллельным сторонам (могут быть два решения, одно и ни одного).

63. То же — по разности оснований, двум боковым сторонам и одной диагонали.

64. То же — по четырем сторонам (всегда ли задача возможна?).

65. То же — по основанию, высоте и двум диагоналям (условие возможности).

66. То же — по двум основаниям и двум диагоналям (условие возможности).

67. Построить квадрат по сумме стороны с диагональю.

68. То же — по разности диагонали и стороны.

69. Построить параллелограмм по двум диагоналям и высоте.

70. То же — по стороне, сумме диагоналей и углу между ними.

71. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

72. То же — по основанию, высоте и медиане, проведенной к боковой стороне.

73. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме катетов (исследовать).

74. То же — по гипотенузе и разности катетов.

75. Даны две точки A и B , расположенные по одну сторону от данной прямой XU . Расположить на этой прямой отрезок MN данной длины l так, чтобы ломаная $AM+MN+NB$ была наименьшей длины.

Указание. Приблизим точку B к точке A , двигая ее по прямой, параллельной XU , на расстояние, равное MN .

ОКРУЖНОСТЬ

I. ФОРМА И ПОЛОЖЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

103. Предварительное замечание. Очевидно, что через одну точку (A , рис. 113) можно провести сколько угодно окружностей: центры их можно брать произвольно. Через две точки (A и B , рис. 114) тоже можно провести сколько угодно окружностей, но центры их нельзя брать произвольно, так как точки, одинаково удаленные от двух точек A и B , должны лежать на перпендикуляре, проведенном к отрезку AB через его середину (§ 58).

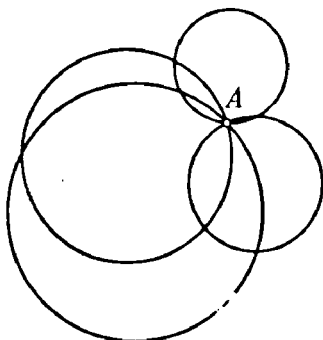


Рис. 113.

Посмотрим теперь, можно ли провести окружность через три точки.

104. Теорема. *Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну.*

Через три точки A , B , C (рис. 115), не лежащие на одной прямой (другими словами, через вершины $\triangle ABC$), только тогда можно провести окружность, если существует такая четвертая точка O , которая одинаково удалена от точек A , B и C . Докажем, что такая точка существует и притом только одна. Для этого примем во внимание, что всякая точка, одинаково удаленная от точек A и B , должна лежать на перпендикуляре MN , проведенном к стороне AB через ее середину (§ 58); точно также всякая точка, одинаково удаленная от точек B и C , должна лежать на перпендикуляре PQ , проведенном к стороне BC через ее середину. Значит, если существует точка, одинаково удаленная от трех точек A , B и C , то она должна лежать одновременно и на MN и на PQ , что возмож-

но только тогда, когда она совпадает с точкой пересечения этих двух прямых. Прямые MN и PQ всегда пересекаются, так как они перпендикулярны к пересекающимся прямым AB и BC (§ 78). Точка O их пересечения и будет точкой, одинаково удаленной от A , от B и от C ; значит, если примем эту точку за центр, а за радиус возьмем отрезок OA (или OB , или OC), то окружность пройдет через точки A , B и C . Так как прямые MN и PQ могут пересечься только в одной точке, то центр такой окружности может быть только один и длина ее радиуса может быть только одна; значит, искомая окружность — единственная.

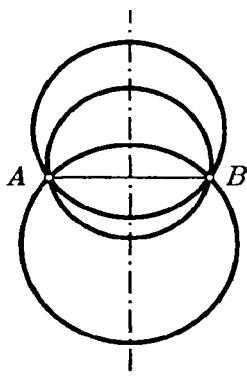


Рис. 114.

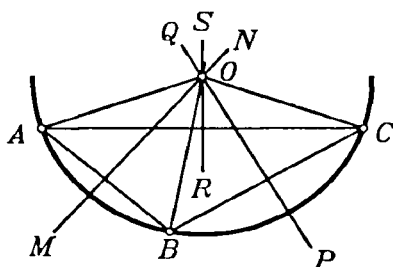


Рис. 115.

Замечание. Если бы три точки A , B и C (рис. 115) лежали на одной прямой, то перпендикуляры MN и PQ были бы параллельны и, значит, не могли бы пересечься. Следовательно, через три точки, лежащие на одной прямой, нельзя провести окружности.

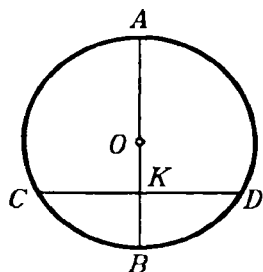


Рис. 116.

Следствие. Точка O (рис. 115), находясь на одинаковом расстоянии от A и от C , должна также лежать на перпендикуляре RS , проведенном к стороне AC через ее середину. Таким образом:

три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины, пересекаются в одной точке.

105. Теорема. Диаметр (AB , рис. 116), перпендикулярный к хорде (CD), делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам.

Перегибем чертеж по диаметру AB так, чтобы его левая часть упала на правую. Тогда левая полуокружность совместится с правой полуокружностью, и перпендикуляр KC пойдет по KD . Из этого следует, что точка C , представляющая собой пересечение полуокружности с KC , упадет на D ; поэтому $CK=KD$; $\cup BC=\cup BD$; $\cup AC=\cup AD$.

106. Обратные теоремы. 1. Диаметр (AB), проведенный через середину хорды (CD), перпендикулярен к этой хорде и делит дугу, стягивающую ее пополам (рис. 116).

2. Диаметр (AB), проведенный через середину дуги (CBD), перпендикулярен к хорде, стягивающей эту дугу, и делит ее пополам.

Оба эти предложения легко доказываются от противного.

107. Теорема. Дуги (AC и BD , рис. 117), заключенные между параллельными хордами (AB и CD), равны.

Перегибем чертеж по диаметру $EF \perp AB$. Тогда на основании предыдущей теоремы можно утверждать, что точка A упадет в B , точка C упадет в D , и, следовательно, дуга AC совместится с дугой BD , т. е. эти дуги равны.

108. Задачи. 1) Разделить данную дугу (AB , рис. 118) пополам.

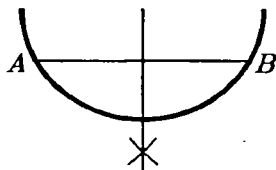


Рис. 118.

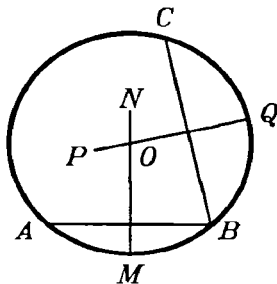


Рис. 119.

Соединив концы дуги хордой AB , опускаем на нее перпендикуляр из центра и продолжаем его до пересечения с дугой. По доказанному в предыдущей теореме, дуга AB разделится этим перпендикуляром пополам. Если же центр не из-

вестен, тогда к хорде AB следует провести перпендикуляр через ее середину.

2) *Найти центр данной окружности (рис. 119).*

Взяв на данной окружности какие-нибудь три точки A , B и C , проводят через них две хорды, например AB и CB , и через середины этих хорд проводят к ним перпендикуляры MN и PQ . Искомый центр, будучи одинаково удален от A , B и C , должен лежать и на MN , и на PQ ; следовательно, он находится в пересечении этих перпендикуляров, т. е. в точке O .

II. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ДУГАМИ, ХОРДАМИ И РАССТОЯНИЯМИ ХОРД ОТ ЦЕНТРА

109. Теоремы. В одном круге или в равных кругах:

1) *если дуги равны, то стягивающие их хорды равны и одинаково удалены от центра;*

2) *если две дуги, меньшие полуокружности, не равны, то большая из них стягивается большей хордой и из обеих хорд большая расположена ближе к центру.*

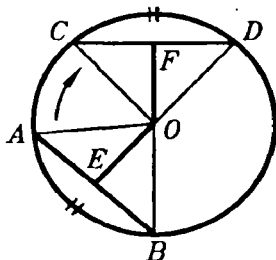


Рис. 120.

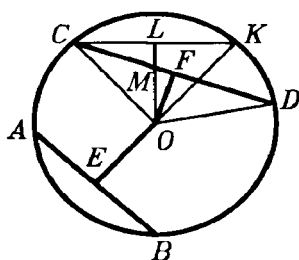


Рис. 121.

1) Пусть дуга AB равна дуге CD (рис. 120), требуется доказать, что хорды AB и CD равны, а также равны и перпендикуляры OE и OF , опущенные из центра на хорды.

Повернем сектор OAB вокруг центра O в направлении, указанном стрелкой на столько, чтобы радиус OB совпал с OC . Тогда дуга BA пойдет по дуге CD и вследствие их равенства эти дуги совместятся. Значит, хорда AB совместится с хордой CD и перпендикуляр OE совпадет с OF (из одной точки можно опустить на прямую только один перпендикуляр), т. е. $AB=CD$ и $OE=OF$.

2) Пусть дуга AB (рис. 121) меньше дуги CD , и притом обе дуги меньше полуокружности; требуется доказать, что

хорда AB меньше хорды CD , а перпендикуляр OE больше перпендикуляра OF . Отложим на дуге CD дугу CK , равную AB , и проведем вспомогательную хорду CK , которая, по доказанному, равна хорде AB и одинаково с ней удалена от центра. У треугольников COD и COK две стороны одного равны двум сторонам другого (как радиусы), а углы, заключенные между этими сторонами, не равны; в этом случае, как мы знаем (§ 52), против большего из углов, т. е. $\angle COD$, должна лежать большая сторона, значит, $CD > CK$, и потому $CD > AB$.

Для доказательства того, что $OE > OF$, проведем $OL \perp CK$ и примем во внимание, что, по доказанному, $OE = OL$; следовательно, нам достаточно сравнить OF с OL . В прямоугольном треугольнике OFM (покрытом на рисунке штрихами) гипотенуза OM больше катета OF ; но $OL > OM$; значит, и по-прежнему $OL > OF$, и потому $OE > OF$.

Теорема, доказанная нами для одного круга, остается верной и для равных кругов, потому что такие круги один от другого отличаются только положением.

110. Обратные теоремы. Так как в предыдущем параграфе рассмотрены всевозможные взаимно исключающие случаи относительно сравнительной величины двух дуг одного радиуса, причем получились взаимно исключающие выводы относительно сравнительной величины хорд и расстояний их от центра, то обратные предложения должны быть верны, а именно:

В одном круге или в равных кругах:

1) *равные хорды одинаково удалены от центра и стягивают равные дуги;*

2) *хорды, одинаково удаленные от центра, равны и стягивают равные дуги;*

3) *из двух неравных хорд большая ближе к центру и стягивает большую дугу;*

4) *из двух хорд, неодинаково удаленных от центра, та, которая ближе к центру, больше и стягивает большую дугу.*

Эти предложения легко доказываются от противного. Например, для доказательства первого из них рассуждаем так: если бы данные хорды стягивали неравные дуги, то, согласно прямой теореме, они были бы не равны, что противоречит условию; значит, равные хорды должны стягивать равные дуги; а если дуги равны, то, согласно прямой теореме, стягивающие их хорды одинаково удалены от центра.

111. Теорема. Диаметр есть наибольшая из хорд.

Если соединим с центром O концы какой-нибудь хорды, не проходящей через центр, например хорды AB (рис. 122), то получим треугольник AOB , в котором одна сторона есть эта хорда, а две другие — радиусы. Но в треугольнике каждая сторона менее суммы двух других сторон; следовательно, хорда AB менее суммы двух радиусов; тогда как всякий диаметр CD равен сумме двух радиусов. Значит, диаметр больше всякой хорды, не проходящей через центр. Но так как диаметр есть тоже хорда, то можно сказать, что диаметр есть **наибольшая** из хорд.

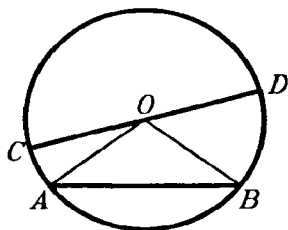


Рис. 122.

III. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

112. Прямая и окружность могут, очевидно, находиться только в следующих трех относительных положениях:

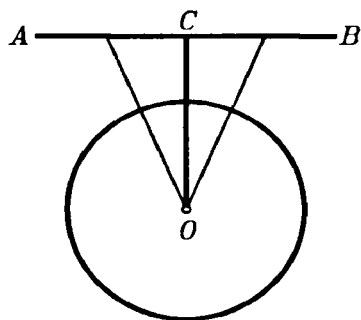


Рис. 123.

1) *Расстояние (OC) центра от прямой (AB) (т. е. длина перпендикуляра OC, опущенного из центра на прямую) больше радиуса окружности* (рис. 123). Тогда точка C прямой удалена от центра больше, чем радиус, и потому лежит вне круга. Так как все остальные точки прямой удалены от O еще более, чем точка C (наклонные длиннее перпендикуляра), то они все лежат вне круга; значит, тогда прямая не имеет

никаких точек, общих с окружностью.

2) *Расстояние (OC) центра от прямой меньше радиуса.* В этом случае (рис. 124) точка C лежит внутри круга, и тогда, очевидно, прямая пересекается с окружностью.

3) *Расстояние (OC) центра от прямой равно радиусу.* Тогда точка C (рис. 125) принадлежит и прямой, и окружно-

сти, все же остальные точки прямой, будучи удалены от O более, чем точка C , лежат вне круга. Значит, в этом случае прямая и окружность имеют только одну общую точку, именно ту, которая служит основанием перпендикуляра, опущенного из центра на прямую.

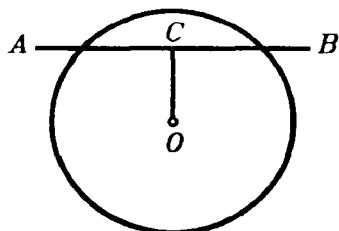


Рис. 124.

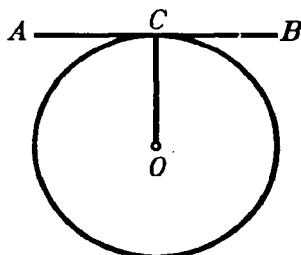


Рис. 125.

Такая прямая, которая с окружностью имеет только одну общую точку, называется **касательной к окружности**; общая точка называется **точкой касания**.

113. Относительно касательной мы докажем следующие две теоремы (прямую и обратную) (рис. 126):

1) *если прямая (MN) перпендикулярна к радиусу (OA) в конце его (A), лежащем на окружности, то она касается окружности*, и обратно (рис. 126);

2) *если прямая касается окружности, то радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к ней*.

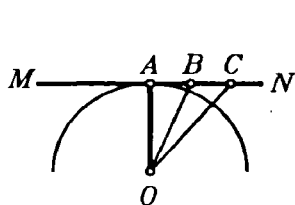


Рис. 126.

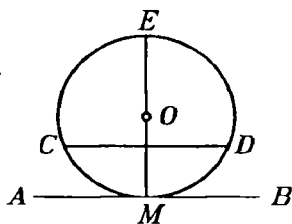


Рис. 127.

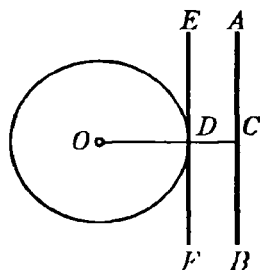


Рис. 128.

1) Точка A , как конец радиуса, лежащий на окружности, принадлежит этой окружности; в то же время она принадлежит и прямой MN . Значит, эта точка есть общая у окружности и прямой. Все же остальные точки прямой MN , как B , C и другие, отстоят от центра O дальше, чем на радиус (так как отрезки OB , OC , ..., как наклонные, больше перпен-

дикуляра OA), и потому они лежат вне окружности. Таким образом, у прямой MN есть только одна точка (A), общая с окружностью, и, значит, прямая MN есть касательная.

2) Если MN касается окружности в точке A , то все остальные точки этой прямой должны лежать вне окружности: вследствие этого отрезки OB , OC , ... больше радиуса OA (точка O есть центр окружности). Значит, этот радиус есть наименьший из отрезков, соединяющих точку O с любой точкой прямой MN , и потому $OA \perp MN$.

114. Теорема. *Если касательная параллельна хорде, то точка касания делит дугу, стягиваемую хордой, пополам.*

Пусть прямая AB касается окружности в точке M (рис. 127) и параллельна хорде CD ; требуется доказать, что $\cup CM = \cup MD$.

Проведя через точку касания диаметр ME , будем иметь: $EM \perp AB$ и, следовательно, $EM \perp CD$; поэтому $\cup CM = \cup MD$.

115. Задача. *Провести касательную к данной окружности O параллельно данной прямой AB (рис. 128).*

Опускаем на AB из центра O перпендикуляр OC и через точку D , в которой этот перпендикуляр пересекается с окружностью, проводим $EF \parallel AB$. Искомая касательная будет EF . Действительно, так как $OC \perp AB$ и $EF \parallel AB$, то $EF \perp OD$; а прямая, перпендикулярная к радиусу в конце его, лежащем на окружности, есть касательная.

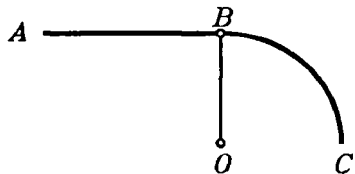


Рис. 129.

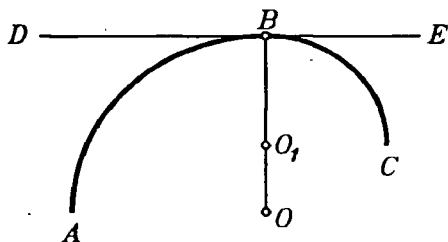


Рис. 130.

116. Сопряжение дуги с прямой или с другой дугой. При вычерчивании прямых линий и дуг окружностей принято говорить, что прямая AB (рис. 129) и дуга окружности BC , сходящиеся в точке B , сопряжены, если в этой точке они касаются друг друга.

Две дуги AB и BC (рис. 130), сходящиеся в точке B , сопряжены, если в этой точке имеют общую касательную DE .

Для сопряжения прямой с дугой необходимо (§ 113), чтобы центр окружности, которой принадлежит дуга, лежал на перпендикуляре к прямой, восстановленном из точки сопряжения.

Для сопряжения одной дуги с другой дугой необходимо (§ 113), чтобы центры двух окружностей, которым принадлежат дуги, лежали на прямой, проходящей через точку сопряжения и перпендикулярной к общей касательной этих дуг.

Сопряжение двух линий (прямой с дугой или двух дуг) делает переход с одной линии на другую плавным, без выступов; оно практикуется, например, при устройстве закруглений железнодорожных или трамвайных путей.

IV. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ

117. Определение. Если две окружности имеют только одну общую точку, то говорят, что они *касаются*; если же две окружности имеют две общие точки, то говорят, что они *пересекаются*.

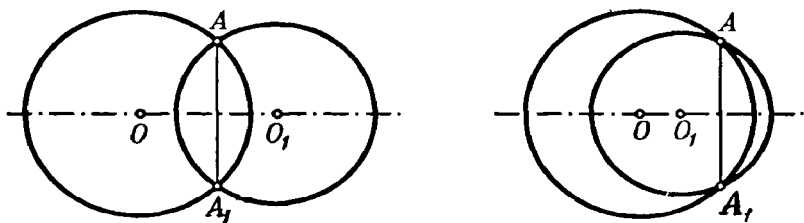


Рис. 131.

Трех общих точек две несливающиеся окружности иметь не могут, потому что в противном случае через три точки можно было бы провести две различные окружности, что невозможно (§ 104).

Будем называть *линией центров* бесконечную прямую, проходящую через центры окружностей.

118. Теорема. Если две окружности (рис. 131) имеют общую точку (A), расположенную вне линии центров, то они имеют еще и другую общую точку (A_1), симметричную с первой относительно линии центров (и, следовательно, такие окружности пересекаются).

Линия центров содержит в себе диаметры обеих окружностей и поэтому должна быть осью симметрии всей фигуры; поэтому общей точке A , лежащей вне линии центров, должна соответствовать симметричная общая точка A_1 , расположенная по другую сторону от оси симметрии (на одном перпендикуляре к линии центров и на равном расстоянии от нее).

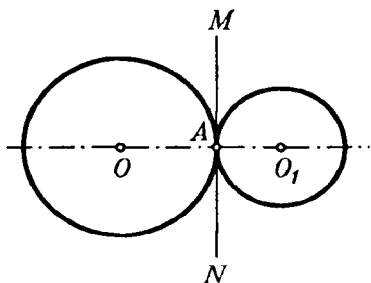


Рис. 132.

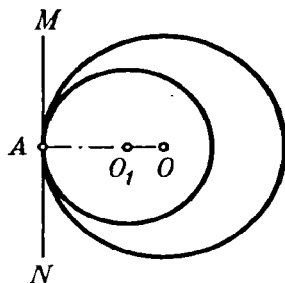


Рис. 133.

Следствие. Общая хорда (AA_1 , рис. 131) двух пересекающихся окружностей перпендикулярна к линии центров и делится ею пополам.

119. Теорема. Если две окружности имеют общую точку (A) на линии их центров, то они касаются (рис. 132 и 133).

Окружности не могут иметь другой общей точки вне линии центров, потому что в противном случае они имели бы еще третью общую точку по другую сторону от линии центров и, следовательно, должны были бы слиться. Они не могут иметь другой общей точки и на линии центров, так как, имея на этой линии две общие точки, они должны были бы иметь и общую хорду, соединяющую эти точки. Но хорда, проходящая через центры, должна быть диаметром; если же окружности имеют общий диаметр, то они сливаются в одну окружность.

Замечание. Касание двух окружностей называется **внешним**, если окружности расположены одна вне другой (рис. 132), и **внутренним**, если одна из окружностей лежит внутри другой (рис. 133).

120. Теорема (обратная предыдущей). Если две окружности касаются (в точке A , рис. 132 и 133), то точка касания лежит на линии центров.

Точка A не может лежать вне линии центров, потому что в противном случае окружности имели бы еще другую общую точку, что противоречит условию теоремы.

121. Следствие. *Две касающиеся окружности имеют общую касательную в точке касания, потому что если проведем через точку касания прямую MN (рис. 132 и 133), перпендикулярную к радиусу OA , то эта прямая будет также перпендикулярна и к радиусу O_1A .*

122. Различные случаи взаимного расположения двух окружностей. Обозначим радиусы двух окружностей буквами R и R_1 и расстояние между их центрами буквой d . Рассмотрим, какова зависимость между этими величинами в различных случаях взаимного расположения двух окружностей. Этих случаев можно указать пять, а именно:

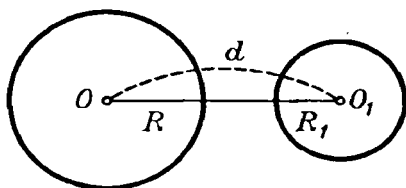


Рис. 134.

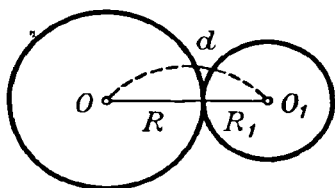


Рис. 135.

1) Окружности лежат одна вне другой, не касаясь (рис. 134); в этом случае, очевидно, $d > R + R_1$.

2) Окружности имеют внешнее касание (рис. 135); тогда $d = R + R_1$, так как точка касания лежит на линии центров.

3) Окружности пересекаются (рис. 131); тогда $d < R + R_1$ и в то же время $d > R - R_1$, потому что в $\triangle OAO_1$ ¹ сторона OO_1 , равная d , меньше суммы, но больше разности двух других сторон, равных радиусам R и R_1 .

4) Окружности имеют внутреннее касание (рис. 133); в этом случае $d = R - R_1$, потому что точка касания лежит на линии центров.

5) Одна окружность лежит внутри другой, не касаясь (рис. 136); тогда, очевидно, $d < R - R_1$, и в частном случае $d = 0$, когда центры обеих окружностей сливаются (такие окружности называются **концентрическими**).

Замечание. Учащимся предлагается проверить правильность обратных предложений, а именно:

¹ На рисунке 131 провести прямые OA и O_1A .

1) Если $d > R + R_1$, то окружности расположены одна вне другой, не касаясь.

2) Если $d = R + R_1$, то окружности касаются извне.

3) Если $d < R + R_1$ и в то же время $d > R - R_1$, то окружности пересекаются.

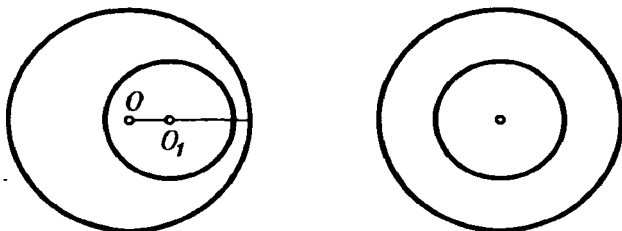


Рис. 136.

4) Если $d = R - R_1$, то окружности касаются изнутри.

5) Если $d < R - R_1$, то одна окружность лежит внутри другой, не касаясь.

Все эти предложения легко доказываются от противного.

V. ВПИСАННЫЕ И НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ УГЛЫ .

ПОСТРОЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ

123. Вписанный угол. Угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности, называется **вписанным углом**. Таков, например, угол ABC (рис. 137). О вписанном угле принято говорить, что он **опирается** на дугу, заключенную между его сторонами. Так, угол ABC опирается на дугу AC .

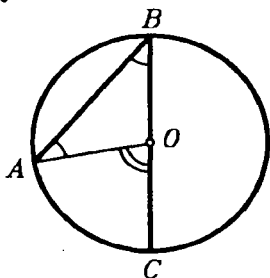


Рис. 137.

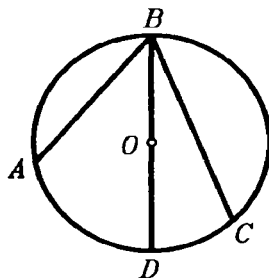


Рис. 138.

124. Теорема. **Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.**

Эту теорему надо понимать так: вписанный угол содержит в себе столько угловых градусов, минут и секунд, сколько дуговых градусов, минут и секунд заключается в половине дуги, на которую он опирается.

При доказательстве теоремы рассмотрим особо три случая:

1) Центр O (рис. 137) лежит на стороне вписанного угла ABC . Проведем радиус AO , мы получим $\triangle AOB$, в котором $OA=OB$ (как радиусы), и, следовательно, $\angle ABO=\angle BAO$. По отношению к этому треугольнику угол AOC есть внешний, поэтому он равен сумме углов ABO и BAO и, значит, равен двум углам ABO ; поэтому угол ABO равен половине центрального угла AOC . Но угол AOC измеряется дугой AC , т. е. он содержит в себе столько угловых градусов, минут и секунд, сколько дуговых градусов, минут и секунд содержится в дуге AC ; следовательно, вписанный угол ABC измеряется половиной дуги AC .

2) Центр O лежит между сторонами вписанного угла ABC (рис. 138).

Проведем диаметр BD , мы разделим угол ABC на два угла, из которых, по доказанному, один измеряется половиной дуги AD , а другой — половиной дуги DC ; следовательно, угол ABC измеряется суммой $\frac{1}{2}\cup AD + \frac{1}{2}\cup DC$, а эта сумма равна $\frac{1}{2}(\cup AD + \cup DC)$, т. е. $\frac{1}{2}\cup AC$.

3) Центр O лежит вне вписанного угла ABC (рис. 139).

Проведем диаметр BD , мы будем иметь:

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD.$$

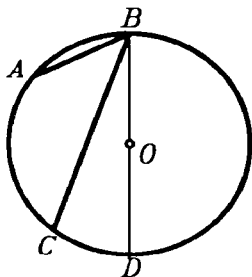


Рис. 139.

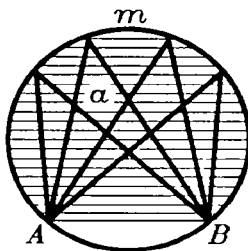


Рис. 140.

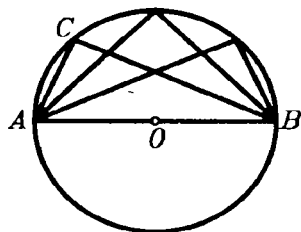


Рис. 141.

Но углы ABD и CBD измеряются, по доказанному, половинами дуг AB и CD ; следовательно, угол ABC измеряется разностью $\frac{1}{2}\cup AD - \frac{1}{2}\cup CD$, а эта разность равна $\frac{1}{2}(\cup AD - \cup CD)$, т. е. $\frac{1}{2}\cup AC$.

125. Следствие. 1) Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой (рис. 140), потому что каждый из них измеряется половиной одной и той же дуги. Если величину одного из таких углов обозначим α , то можно сказать, что сегмент AmB , покрытый на чертеже штрихами, вмещает в себя угол, равный α .

2) Всякий вписанный угол, опирающийся на диаметр, есть прямой (рис. 141), потому что каждый такой угол измеряется половиной полуокружности и, следовательно, содержит 90° .

126. Задача. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе a и по катету b (рис. 142).

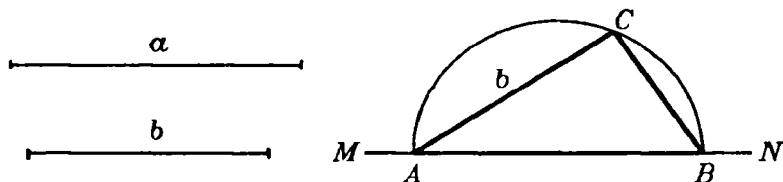


Рис. 142.

На какой-нибудь прямой MN отложим $AB=a$, на AB опишем полуокружность. Затем проводим дугу радиусом, равным b , с центром в точке A (или B).

Точку пересечения C полуокружности и дуги соединим с концами диаметра AB . Треугольник ABC будет искомым, так как угол C — прямой, a является гипотенузой, а b — катетом.

127. Задача. Из конца A (рис. 143) данного луча AB , не продолжая его, восстановить к нему перпендикуляр.

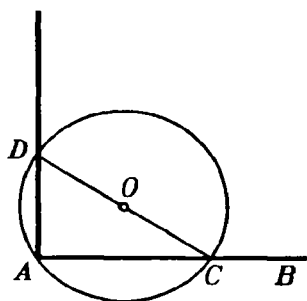


Рис. 143.

Возьмем вне прямой какую-либо точку O так, чтобы окружность с центром в этой точке и радиусом, равным отрезку OA , пересекла луч AB в какой-либо точке C . Через эту точку C проведем диаметр CD и конец его D соединим с A . Прямая AD есть искомый перпендикуляр, потому что угол A прямой, как вписанный и опирающийся на диаметр.

128. Задача. Через данную точку провести к данной окружности касательную.

Рассмотрим два случая:

1) Данная точка (C , рис. 144) лежит на самой окружности. Тогда через нее проводим радиус и через ко-

нец его строим перпендикуляр AB к этому радиусу (так, как указано в предыдущей задаче).

2) Данная точка (A , рис. 145) лежит вне самой окружности (центра O). Тогда, соединив A с O , делим AO пополам в точке O_1 и с центром в этой точке радиусом OO_1 описываем окружность. Через точки B и B_1 , в которых эта окружность пересекается с данной, проводим прямые AB и AB_1 . Эти прямые и будут касательными, так как углы OBA и OB_1A , как опирающиеся на диаметр, — прямые.

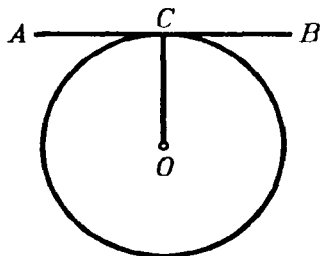


Рис. 144.

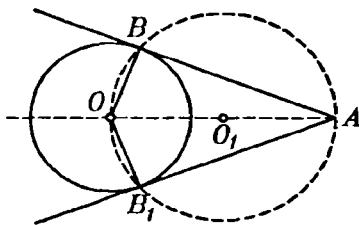


Рис. 145.

Следствие. Две касательные, проведенные к окружности из точки вне ее, равны и образуют равные углы с прямой, соединяющей эту точку с центром, что следует из равенства прямоугольных треугольников AOB и AOB_1 (рис. 145).

129. Задача. К двум окружностям O и O_1 провести общую касательную (рис. 146).

1) Анализ. Предположим, что задача решена. Пусть AB будет общая касательная, A и B — точки касания. Очевидно, что если мы найдем одну из этих точек, например A , то затем легко найдем и другую. Проведем радиусы OA и O_1B . Эти радиусы, будучи перпендикулярны к общей касательной, параллельны между собой; поэтому, если из O_1 проведем $O_1C \parallel BA$, то треугольник OCO_1 будет прямоугольным с прямым углом при вершине C ; вследствие этого, если опишем с центром в точке O радиусом OC окружность, то она будет касаться прямой O_1C в точке C . Радиус этой вспомогательной окружности известен: если он равен

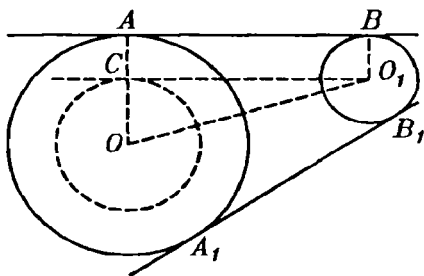


Рис. 146.

$OA - CA = OA - O_1B$, т. е. он равен разности радиусов данных окружностей.

Построение. Таким образом, построение можно выполнить так: описываем окружность с центром в точке O радиусом, равным разности данных радиусов; из O_1 проводим к этой окружности касательную O_1C (способом, указанным в предыдущей задаче); через точку касания C проводим радиус OC и продолжаем его до встречи с данной окружностью в точке A . Наконец, из A проводим AB параллельно CO_1 .

Совершенно таким же способом мы можем построить другую общую касательную A_1B_1 . Прямые AB и A_1B_1 называются **внешними** общими касательными двух окружностей.

Можно еще провести две **внутренние** касательные следующим образом (рис. 147).

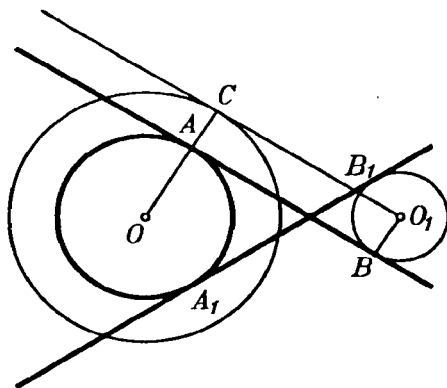


Рис. 147.

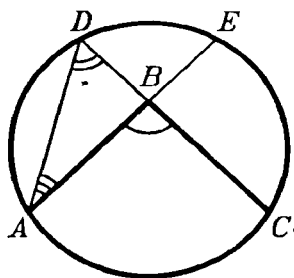


Рис. 148.

2) **Анализ.** Предположим, что задача решена. Пусть AB будет искомая касательная. Проведем радиусы OA и O_1B в точки касания A и B . Эти радиусы, будучи оба перпендикулярны к общей касательной, параллельны между собой.

Поэтому, если из O_1 проведем $O_1C \parallel BA$ и продолжим OA до пересечения с O_1C в точке C , то OC будет перпендикулярен к O_1C ; вследствие этого окружность, описанная радиусом OC с центром в точке O , будет касаться прямой O_1C в точке C . Радиус этой вспомогательной окружности известен, он равен: $OA + AC = OA + O_1B$, т. е. он равен сумме радиусов окружностей.

Построение. Таким образом, построение можно выполнить так: описываем окружность с центром в точке O радиусом, равным сумме данных радиусов; из O_1 проводим к этой окружности касательную O_1C ; точку касания C соединя-

ем с O ; наконец, через точку A , в которой OC пересекается с данной окружностью, проводим $AB \parallel CO_1$. Подобным же способом можно построить и другую общую касательную A_1B_1 .

130. Теорема. 1) Угол (ABC , рис. 148), вершина которого лежит внутри круга, измеряется полусуммой двух дуг (AC и DE), из которых одна заключена между его сторонами, а другая — между продолжениями сторон.

2) Угол (ABC , рис. 149), вершина которого лежит вне круга и стороны пересекаются с окружностью, измеряется полуразностью двух дуг (AC и ED), заключенных между его сторонами.

Проведя хорду AD (на том и на другом чертеже), мы получим $\triangle ABD$, относительно которого рассматриваемый угол ABC служит внешним, когда его вершина лежит внутри круга, и внутренним, когда его вершина лежит вне круга. Поэтому в первом случае: $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$; во втором случае: $\angle ABC = \angle ADC - \angle DAE$.

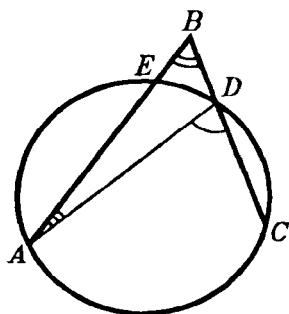


Рис. 149.

Но углы ADC и DAE , как вписанные, измеряются половинами дуг AC и DE ; поэтому угол ABC измеряется: в первом случае суммой $\frac{1}{2}\cup AC + \frac{1}{2}\cup DE$, которая равна $\frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE)$, а во втором случае разностью $\frac{1}{2}\cup AC - \frac{1}{2}\cup DE$, которая равна $\frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$.

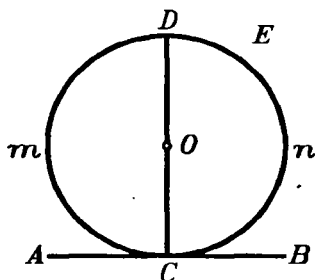


Рис. 150.

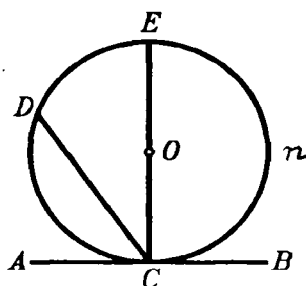


Рис. 151.

131. Теорема. Угол (ACD , рис. 150 и 151), составленный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, заключенной внутри него.

Предположим сначала, что хорда CD проходит через центр O , т. е. что хорда есть диаметр (рис. 150). Тогда угол ACD — прямой и, следовательно, равен 90° . Но и половина

дуги CmD также равна 90° , так как целая дуга CmD , составляя полуокружность, содержит 180° . Значит, теорема оправдывается в этом частном случае.

Теперь возьмем общий случай (рис. 151), когда хорда CD не проходит через центр. Проведя тогда диаметр CE , мы будем иметь: $\angle ACD = \angle ACE - \angle DCE$.

Угол ACE , как составленный касательной и диаметром, измеряется, по доказанному, половиной дуги CDE ; угол DCE , как вписанный, измеряется половиной дуги DE ; следовательно, угол ACD измеряется разностью $\frac{1}{2}\text{дуги } CDE - \frac{1}{2}\text{дуги } DE$, т. е. половиной дуги CD .

Подобным же образом можно доказать, что тупой угол BCD (рис. 151), также составленный касательной и хордой, измеряется половиной дуги $CnED$; разница в доказательстве только та, что этот угол надо рассматривать не как разность, а как сумму прямого угла BCE и острого угла ECD .

132. Задача. На данном отрезке AB построить сегмент, вмещающий данный угол α (рис. 152).

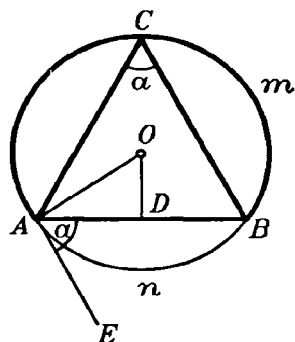


Рис. 152.

Анализ. Предположим, что задача решена; пусть сегмент AmB будет такой, который вмещает в себя угол α , т. е. такой, что всякий вписанный в него угол ACB равен α . Проведем вспомогательную прямую AE , касательную к окружности в точке A . Тогда угол BAE , составленный касательной и хордой, должен равняться вписанному углу ACB , так как и тот и другой угол измеряется половиной дуги AmB . Примем теперь во внимание, что центр O окружности должен лежать на перпендикуляре DO , проведенном к отрезку AB через его середи-

ну, и в то же время он должен лежать и на перпендикуляре AO , восстановленном к касательной AE из точки касания. Отсюда выводим следующее построение.

Построение. При конце отрезка AB строим угол BAE , равный углу α ; через середину AB проводим перпендикуляр DO и из точки A восстанавливаем перпендикуляр к AE ; точку пересечения O этих двух перпендикуляров принимаем за центр и радиусом AO описываем окружность.

Доказательство. Сегмент AmB будет искомым, потому что всякий вписанный в него угол измеряется половиной дуги AmB , а половина этой дуги измеряет также и угол $BAE = \alpha$.

З а м е ч а н и е. На рисунке 152 построен сегмент, расположенный выше отрезка AB . Такой же сегмент может быть построен и по другую сторону отрезка AB . Таким образом, можно сказать, что *геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α , состоит из дуг двух сегментов, из которых каждый вмещает в себя угол α и один расположен по одну сторону отрезка AB , а другой — по другую сторону.*

Задачи на построение

133. Метод геометрических мест. Для решения многих задач на построение можно с успехом применять понятие о геометрическом месте и основанный на нем метод геометрических мест.

Этот метод, известный еще со времен Платона (IV век до нашей эры), состоит в следующем. Положим, что решение предложенной задачи сводится к нахождению некоторой точки, которая должна удовлетворять известным условиям. Отбросим из этих условий какое-нибудь одно; тогда задача делается неопределенной, т. е. ей может удовлетворять бесчисленное множество точек. Эти точки составят некоторое геометрическое место. Построим его, если это окажется возможным. Затем примем во внимание отброшенное нами условие и откинем какое-нибудь другое; тогда задача будет снова удовлетворяться бесчисленным множеством точек, которые составят новое геометрическое место. Построим его, если это возможно. Искомая точка, удовлетворяя всем условиям, должна лежать на обоих геометрических местах, т. е. она должна находиться в их пересечении. Задача окажется возможной или невозможной, смотря по тому, пересекаются или нет найденные геометрические места; и задача будет иметь столько решений, сколько окажется точек пересечения.

Приведем на этот метод один пример, который вместе с тем покажет нам, как иногда приходится вводить в чертеж вспомогательные линии с целью принять во внимание все данные условия задачи.

134. Задача. Построить треугольник по основанию a , углу при вершине A и сумме s боковых сторон.

Пусть ABC будет искомый треугольник (рис. 153). Чтобы принять во внимание данную сумму боковых сторон, продолжим BA и отложим $BM=s$. Проведем MC , получим вспомо-

гательный треугольник BMC . Если мы построим этот треугольник, то затем легко построить искомый треугольник ABC .

Построение треугольника BMC сводится к нахождению точки M . Заметив, что треугольник AMC равнобедренный ($AM=AC$) и, следовательно, $\angle M = \frac{1}{2}\angle BAC$ (так как $\angle M + \angle MCA = \angle BAC$), мы видим, что точка M должна удовле-

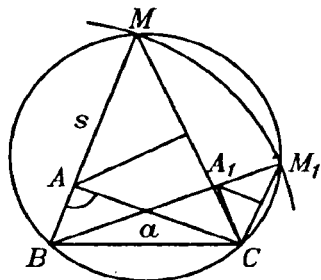


Рис. 153.

творять двум условиям: 1) она удалена от B на расстояние s ; 2) из нее данный отрезок BC виден под углом, равным $\frac{1}{2}\angle A$. Отбросив второе условие, мы получим бесчисленное множество точек M , лежащих на окружности, описанной радиусом s , с центром в точке B . Отбросив первое условие, мы получим бесчисленное множество точек M , лежащих на дуге сегмента, построенного на BC и вмещающего угол, равный $\frac{1}{2}\angle A$.

Таким образом, нахождение точки M сводится к построению двух геометрических мест, из которых каждое мы построить умеем. Задача окажется невозможной, если эти геометрические места не будут иметь общих точек; задача будет иметь одно или два решения, смотря по тому, касаются или же пересекаются эти геометрические места (на нашем чертеже получаются два треугольника ABC и A_1BC , удовлетворяющие условиям задачи).

Иногда задача сводится не к определению точки, а к нахождению прямой, удовлетворяющей нескольким условиям. Если отбросим одно из условий, то получим бесчисленное множество прямых; при этом может случиться, что эти прямые определяют некоторую линию (например, все они будут касательными к некоторой окружности). Отбросив другое условие и приняв во внимание то, которое было откинуто ранее, мы получим снова бесчисленное множество прямых, которые, быть может, определяют некоторую другую линию. Построив, если возможно, эти две линии, мы затем легко найдем и искомую прямую. Приведем пример.

135. Задача. Провести секущую к двум данным окружностям O и O_1 так, чтобы части секущей, заключенные внутри окружностей, равнялись соответственно двум отрезкам a и a_1 .

Если возьмем только одно условие, например, чтобы часть секущей, лежащей внутри круга O , равнялась a , то получим бесчисленное множество секущих, которые все должны быть одинаково удалены от центра этого круга (так как равные хорды одинаково удалены от центра). Поэтому, если в круге O где-нибудь построим хорду, равную a , а затем радиусом, равным расстоянию этой хорды от центра, опишем окружность, концентрическую с O , то все секущие, о которых идет речь, должны касаться этой вспомогательной окружности; подобным образом, приняв во внимание только второе условие, мы увидим, что искомая секущая должна касаться второй вспомогательной окружности, концентрической с O_1 . Значит, вопрос приводится к построению общей касательной к двум окружностям.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти геометрические места

1. Точек, из которых касательные, проведенные к данной окружности, равны данному отрезку.

2. Точек, из которых данная окружность видна под данным углом (т. е. две касательные, проведенные из данной точки к окружности, составляют между собой данный угол).

3. Центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной прямой.

4. Центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной окружности (два случая: касание внешнее и касание внутреннее).

5. Отрезок данной длины движется параллельно самому себе так, что один его конец скользит по окружности. Найти геометрическое место, описанное другим концом.

Указание. Возьмем две прямые, изображающие два положения движущейся прямой, и через их концы, лежащие на окружности, проведем радиусы, а через другие концы проведем прямые, параллельные этим радиусам, до пересечения с прямой, проходящей через центр и параллельной движущейся линии. Рассмотрим образовавшиеся параллелограммы.

6. Отрезок данной длины движется так, что концы его скользят по сторонам прямого угла. Найти геометрическое место, описываемое серединой этого отрезка.

Доказать теоремы

7. Из всех хорд, проходящих через точку A , взятую внутри данного круга, наименьшей будет та, которая перпендикулярна к диаметру, проходящему через точку A .

8. На хорде AB взяты две точки D и E на равном расстоянии от середины C этой хорды, и через эти точки составлены к AB перпендикуляры DF и EG до пересечения с окружностью. Доказать, что эти перпендикуляры равны.

У к а з а н и е. Перегнуть чертеж по диаметру.

9. В круге проведены две хорды CC' и DD' перпендикулярно к диаметру AB . Доказать, что прямая MM' , соединяющая середины хорд CD и $C'D'$, перпендикулярна к AB .

10. В круге с центром O проведена хорда AB и продолжена на расстояние BC , равное радиусу. Через точку C и центр O проведена секущая CD (D — вторая точка пересечения с окружностью). Доказать, что угол AOD равен утроенному углу ACD .

11. Если через центр окружности и данную точку вне ее проведем секущую, то часть ее, заключенная между данной точкой и ближайшей точкой пересечения, есть наименьшее расстояние, а часть, заключенная между данной точкой и другой точкой пересечения, есть наибольшее расстояние этой точки от окружности.

12. Кратчайшее расстояние между двумя окружностями, лежащими одна вне другой, есть отрезок линии центров, заключенный между окружностями.

13. Если через точку пересечения двух окружностей будем проводить секущие, не продолжая их за окружности, то наибольшей из них окажется та, которая параллельна линии центров.

14. Если к двум окружностям, касающимся извне, провести три общие касательные, то внутренняя из них делит пополам тот отрезок каждой внешней, который ограничен точками касания.

15. Через точку A окружности проведена хорда AB и затем касательная в точке B ; диаметр, перпендикулярный радиусу OA , встречает касательную и хорду (или ее продолжение) соответственно в точках C и D . Доказать, что $BC=CD$.

16. К двум окружностям центров O и O_1 , касающимся извне в точке A , проведена общая внешняя касательная BC (B и C — точки касания); доказать, что угол BAC есть прямой.

Указание. Провести в точке A общую касательную и рассмотреть равнобедренные треугольники ABD и ADC .

17. Две прямые исходят из одной и той же точки M и касаются окружности в точках A и B . Проведя радиус OB , продолжают его за точку B на расстояние $BC=OB$. Доказать, что $\angle AMC=3\angle BMC$.

18. Две прямые, исходящие из точки M , касаются окружности в точках A и B . На меньшей из двух дуг, ограниченных точками A и B , берут произвольную точку C и через нее проводят третью касательную до пересечения с MA и MB в точках D и E . Доказать, что: 1) периметр $\triangle MDE$ и 2) угол $\angle DOE$ не изменяются при изменении положения точки C .

Указание. Периметр $DME=MA+MB$,
 $\angle DOE=\frac{1}{2}\angle AOB$.

19. Параллельно прямой OO' , соединяющей центры двух равных окружностей, проведена секущая, которая с окружностью O пересекается в точках A и B , с окружностью O' — в точках A' и B' . Доказать, что $AA'=BB'=OO'$.

Задачи на построение

20. Разделить данную дугу на 4, 8, 16, ... равных частей.

21. По сумме и разности дуг одного и того же радиуса найти эти дуги.

22. Описать такую окружность с центром в данной точке, которая разделила бы данную окружность пополам.

23. На данной прямой найти точку, наименее удаленную от данной окружности.

24. В круге дана хорда. Провести другую хорду, которая делилась бы первой пополам и составляла бы с ней данный угол (при всяком ли данном угле задача возможна?).

25. Через данную в круге точку провести хорду, которая делилась бы этой точкой пополам.

26. Из точки, данной на стороне угла, описать окружность, которая от другой стороны угла отсекала бы хорду данной длины.

27. Данным радиусом описать окружность, центр которой лежал бы на стороне данного угла и которая от другой его стороны отсекала бы хорду данной длины.

28. Данным радиусом описать окружность, которая касалась бы данной прямой в данной точке.

29. Провести касательную к данной окружности параллельно данной прямой.

30. Описать окружность, которая проходила бы через данную точку A и касалась бы данной прямой в данной на ней точке B .

31. Описать окружность, касательную к сторонам данного угла, причем к одной из них в данной точке.

32. Между двумя параллельными прямыми дана точка; провести окружность, проходящую через эту точку и касающуюся данных прямых.

33. Провести к данной окружности касательную под данным углом к данной прямой (сколько решений?).

34. Из точки, данной вне круга, провести к нему секущую так, чтобы ее внутренняя часть равнялась данному отрезку (исследовать задачу).

35. Данным радиусом описать окружность, проходящую через данную точку и касательную к данной прямой.

36. На данной прямой найти такую точку, чтобы касательные, проведенные из нее к данной окружности, были данной длины.

37. Построить треугольник, зная один угол и две высоты, из которых одна проведена из вершины данного угла.

38. Даны две точки; провести прямую так, чтобы перпендикуляры, опущенные на нее из этих точек, имели данные длины.

39. Описать окружность, которая проходила бы через данную точку и касалась бы данной окружности в данной точке.

40. Описать окружность, которая касалась бы двух данных прямых и круга, находящегося между ними.

41. Данным радиусом описать окружность, которая касалась бы данного круга и проходила бы через данную точку [рассмотреть три случая; данная точка лежит: 1) вне круга, 2) на окружности и 3) внутри круга].

42. Данным радиусом описать окружность, которая касалась бы данной прямой и данного круга.

43. Данным радиусом описать окружность, которая от сторон данного угла отсекала бы хорды данной длины.

44. Описать окружность, касающуюся данного круга в данной точке и данной прямой (два решения).

45. Описать окружность, касающуюся данной прямой в данной точке и данного круга (два решения).

46. Описать окружность, касающуюся двух данных кругов, причем одного из них в данной точке [рассмотреть три случая: 1) искомый круг лежит вне данных кругов; 2) один из данных кругов лежит вне искомого, другой внутри; 3) оба данных круга лежат внутри искомого].

47. Описать окружность, касающуюся трех равных кругов извне или внутри.

48. В данный сектор вписать окружность, касающуюся радиусов, ограничивающих сектор, и дуги сектора.

49. Вписать в данный круг три равных круга, которые касались бы попарно между собой и данного круга.

50. Через точку, данную внутри круга, провести хорду так, чтобы разность ее отрезков равнялась данному отрезку.

Указание. Провести окружность, концентрическую данной и проходящую через данную точку. В этой окружности от данной точки построить хорду данной длины.

51. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую так, чтобы часть ее, заключенная внутри окружностей, равнялась данной длине.

Указание. Построить прямоугольный треугольник, имеющий гипотенузой отрезок прямой, соединяющей центры данных окружностей с катетом, равным половине данного отрезка, и т. д.

52. Из точки, данной вне круга, провести секущую так, чтобы внешняя ее часть равнялась внутренней.

Указание. Пусть O — центр окружности, R — ее радиус, A — данная точка. Строим $\triangle AOB$, где $AB=R$, $OB=2R$. Если C — середина отрезка OB , то прямая AC — искомая.

53. Начертить дугу, сопрягающуюся (§ 116) с данной прямой в данной точке и проходящую через данную точку.

54. Соединить две непараллельные прямые сопрягающей (§ 116) их дугой. Рассмотреть три случая:

1) когда точки сопряжения и радиус дуги не даны;

2) когда дан только радиус дуги;

3) когда дана только точка сопряжения, а радиус не дан (примеры такого соединения прямых дугами представляют «закругления» железнодорожного пути).

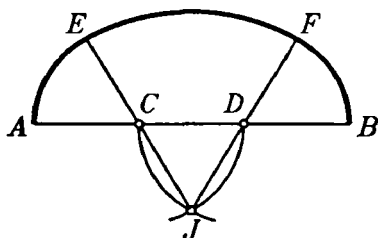


Рис. 154.

55. Линия, называемая в архитектуре «кривой о трех центрах» (или «полуовальной кривой»), чертится так (рис. 154): делят отрезок AB на три равные части в точках C и D ; радиусом, равным CD , с центрами в этих точках, засекают дуги в точке J ; проводят прямые JC и JD и их продолжают; описывают дуги AE и BF с центрами в точках C и D и дугу EF с центром в точке J . Объяснить, почему дуги AE , EF и FB сопрягаются. Сопрягались бы они и тогда, когда AC было бы равно DB , но не равно CD ?

VI. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

136. Определения. Если все вершины многоугольника $ABCDE$ (рис. 155) лежат на окружности, то говорят, что этот многоугольник **вписан в окружность**, или что окружность **описана вокруг него**.

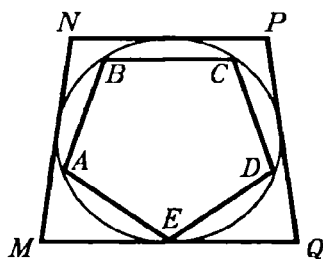


Рис. 155.

Если все стороны какого-нибудь многоугольника ($MNPQ$, рис. 155) касаются окружности, то говорят, что этот многоугольник **описан около окружности**, или что окружность **вписана в него**.

Если все стороны какого-нибудь многоугольника ($MNPQ$, рис. 155) касаются окружности, то говорят, что этот многоугольник **описан около окружности**, или что окружность **вписана в него**.

137. Теоремы: 1) *Около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну.*

2) *Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну.*

1) Вершины A , B , C всякого треугольника суть три точки, не лежащие на одной прямой, а через такие точки, как мы видели (§ 104), всегда можно провести окружность и притом только одну.

2) Если возможна такая окружность, которая касалась бы всех сторон треугольника ABC (рис. 156), то ее центр должен быть точкой, одинаково удаленной от этих сторон. Докажем, что такая точка существует. Геометрическое место точек, равноотстоящих от сторон AB и AC , есть биссектриса AM угла A (§ 60); геометрическое место точек, равноотстоящих от сторон BA и BC , есть биссектриса BN угла B . Эти две биссектрисы должны, очевидно, пересечься внутри треуголь-

ника в некоторой точке O . Эта точка и будет равноудаленной от всех сторон треугольника, так как она находится на обоих геометрических местах. Итак, чтобы вписать круг в треугольник, делим какие-нибудь два угла его, например A и B , пополам и точку пересечения биссектрис берем за центр. За радиус берем один из перпендикуляров OP , OQ или OR , опущенных из центра на стороны треугольника. Окружность коснется сторон в точках P , Q и R , так как стороны в этих точках перпендикулярны к радиусам в их концах, лежащих на окружности (§ 113). Другой вписанной окружности не может быть, так как две биссектрисы пересекаются только в одной точке, а из одной точки на прямую можно опустить только один перпендикуляр.

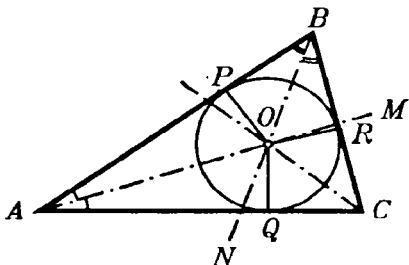


Рис. 156.

З а м е ч а н и е. Предоставляем самим учащимся убедиться, что центр окружности лежит внутри треугольника только тогда, когда треугольник остроугольный; в тупоугольном же треугольнике он лежит вне его, а в прямоугольном — на середине гипотенузы. Центр вписанной окружности всегда лежит внутри треугольника.

С л е д с т в и е. Точка O (рис. 156), находясь на одинаковом расстоянии от сторон AC и CB , должна лежать на биссектрисе угла C ; следовательно, *биссектрисы трех углов треугольника пересекаются в одной точке.*

138. Вневыписанные окружности. Вневыписанными называются окружности (рис. 157), которые касаются одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон (они лежат вне треугольника, вследствие чего и получили название *вневыписанных*). Таких окружностей для всякого треугольника может быть три. Чтобы построить их, проводят биссектрисы внешних углов треугольника ABC и точки их пересечений берут за их центры. Так, центром окружности, вписанной в угол A , служит точка O , т. е. пересечение биссектрис BO и CO внешних углов, не смежных с A ; радиус этой окружности есть перпендикуляр, опущенный из O на какую-либо сторону треугольника.

139. Свойства вписанного выпуклого четырехугольника.

1) В выпуклом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна двум прямым.

2) Обратно, если в выпуклом четырехугольнике сумма противоположных углов равна двум прямым, то около него можно описать окружность.

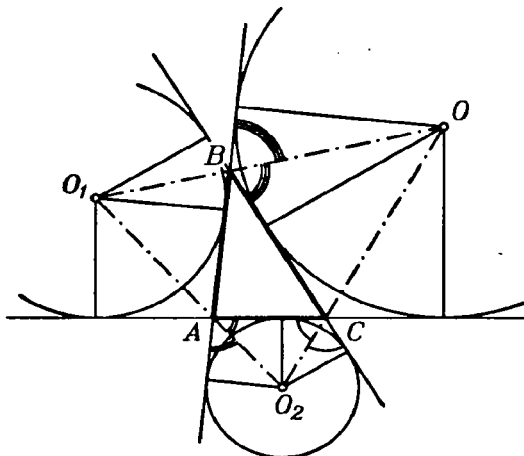


Рис. 157.

1) Пусть $ABCD$ (рис. 158) есть вписанный выпуклый четырехугольник; требуется доказать, что

$$\angle B + \angle D = 2d \text{ и } \angle A + \angle C = 2d.$$

Так как сумма всех четырех углов всякого выпуклого четырехугольника равна $4d$ (§ 82), то достаточно доказать только одно из требуемых равенств.

Докажем, например, что $\angle B + \angle D = 2d$.

Углы B и D , как вписанные, измеряются: первый — половиной дуги ADC , второй — половиной дуги ABC ; следовательно, сумма $\angle B + \angle D$ измеряется суммой $\frac{1}{2}\text{дуги } ADC + \frac{1}{2}\text{дуги } ABC$, а эта сумма равна $\frac{1}{2}(\text{дуги } ADC + \text{дуги } ABC)$, т. е. равна половине окружности; значит, $\angle B + \angle D = 180^\circ = 2d$.

2) Пусть $ABCD$ (рис. 158) есть такой выпуклый четырехугольник, у которого $\angle B + \angle D = 2d$, и, следовательно, $\angle A + \angle C = 2d$. Требуется доказать, что около такого четырехугольника можно описать окружность.

Через какие-нибудь три его вершины, например через A , B и C , проведем окружность (что всегда можно сделать).

Четвертая вершина D должна находиться на этой окружности, потому что в противном случае вершина угла D лежала бы или внутри круга, или вне его, и тогда этот угол не измерялся бы половиной дуги ABC ; поэтому сумма $\angle B + \angle D$ не измерялась бы полусуммой дуг ADC и ABC и, значит, сумма $\angle B + \angle D$ не равнялась бы $2d$, что противоречит условию.

Следствия. 1) Из всех параллелограммов только вокруг прямоугольника можно описать окружность.

2) Около трапеции можно описать окружность только тогда, когда она равнобокая.

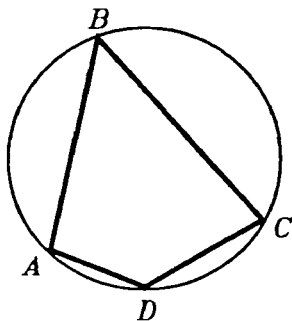


Рис. 158.

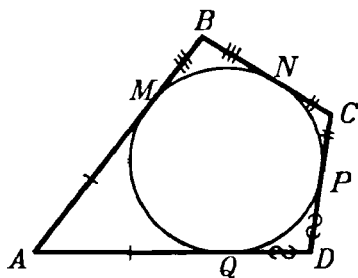


Рис. 159.

140. Свойство описанного четырехугольника. В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

Пусть $ABCD$ (рис. 159) будет описанный четырехугольник, т. е. стороны его касаются окружности; требуется доказать, что $AB + CD = BC + AD$.

Обозначим точки касания буквами M , N , P и Q . Так как две касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны, то $AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP$ и $DP = DQ$.

Следовательно, $AM + MB + CP + PD = AQ + QD + BN + NC$, т. е. $AB + CD = AD + BC$.

VII. ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

141. Мы видели, что:

1) три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины, пересекаются в одной точке (которая есть центр описанного круга);

2) три биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке (которая есть центр описанного круга).

Следующие две теоремы указывают еще две замечательные точки треугольника: 3) точку пересечения трех высот и 4) точку пересечения трех медиан.

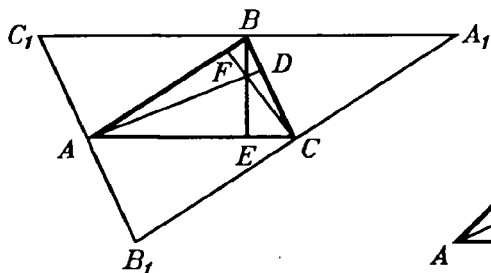


Рис. 160.

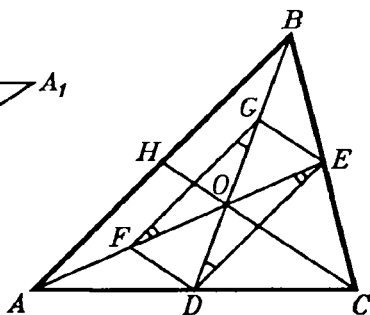


Рис. 161.

142. Теорема. Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Через каждую вершину $\triangle ABC$ (рис. 160) проведем прямую, параллельную противоположной стороне его. Тогда получим вспомогательный $\triangle A_1B_1C_1$, к сторонам которого высоты данного треугольника перпендикулярны. Так как $C_1B = AC = BA_1$ (как противоположные стороны параллелограммов), то точка B есть середина стороны A_1C_1 .

Подобно этому убедимся, что C есть середина A_1B_1 и A — середина B_1C_1 . Таким образом, высоты AD , BE и CF перпендикулярны к сторонам $\triangle A_1B_1C_1$ и проходят через их середины, а такие перпендикуляры, как мы знаем (§ 104), пересекаются в одной точке.

Замечание. Точка, в которой пересекаются высоты треугольника, называется **ортоцентром**.

143. Теорема. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке; эта точка отсекает от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны.

Возьмем в $\triangle ABC$ (рис. 161) какие-нибудь две медианы, например AE и BD , пересекающиеся в точке O , и докажем, что $OD = \frac{1}{3}BD$ и $OE = \frac{1}{3}AE$.

Для этого, разделив OA и OB пополам в точках F и G , построим четырехугольник $DEGF$. Так как отрезок FG соединяет середины двух сторон $\triangle ABO$, то $FG \parallel AB$ и $FG = \frac{1}{2}AB$. От-

резок DE также соединяет середины двух сторон $\triangle ABC$; поэтому $DE \parallel AB$ и $DE = \frac{1}{2}AB$. Отсюда выводим, что $DE \parallel FG$ и $DE = FG$; следовательно, четырехугольник $DEGF$ есть параллелограмм (§ 89), и потому $OF = OE$ и $OG = OD$. Отсюда следует, что

$$OE = \frac{1}{3}AE \text{ и } OD = \frac{1}{3}BD.$$

Если теперь возьмем третью медиану с одной из медиан AE или BD , то также убедимся, что точка их пересечения отсекает от каждой из них $\frac{1}{3}$ часть, считая от основания; значит, третья медиана должна пересечься с медианами AE и BD в одной и той же точке O .

Из физики известно, что пересечение медиан треугольника есть его центр тяжести; он всегда лежит внутри треугольника.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти геометрические места

1. Оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки A на прямые, проходящие через другую данную точку B .
2. Середин хорд, проведенных в окружности через данную внутри нее точку.

Доказать теоремы

3. Если две окружности касаются, то всякая секущая, проведенная через точку касания, отсекает от окружностей две противолежащие дуги одинакового числа градусов.

4. Отрезки двух равных хорд, пересекающихся в одной окружности, соответственно равны.

5. Две окружности пересекаются в точках A и B ; через A проведена секущая, пересекающая окружности в точках C и D ; доказать, что угол CBD есть величина постоянная для всякой секущей, проведенной через точку A .

Указание. Углы ACB и ADB имеют постоянную величину.

6. Если через точку касания двух окружностей проведем две секущие и концы их соединим хордами, то эти хорды параллельны.

7. Если через точку касания двух окружностей проведем внутри них какую-либо секущую, то касательные, проведенные через концы этой секущей, параллельны.

8. Если основания высот треугольника соединим прямыми, то получим новый треугольник, для которого высоты первого служат биссектрисами.

9. На окружности, описанной около равностороннего $\triangle ABC$, взята произвольная точка M ; доказать, что наибольший из отрезков MA , MB , MC равен сумме двух остальных.

10. Из точки P проведены касательные PA и PB и через точку B — диаметр BC . Доказать, что прямые CA и OP параллельны (O — центр окружности).

11. Через одну из точек пересечения двух окружностей проводят диаметр в каждой из них. Доказать, что прямая, соединяющая концы этих диаметров, проходит через вторую точку пересечения окружностей.

12. Диаметр AB и хорда AC образуют угол в 30° . Через C проведена касательная, пересекающая продолжение AB в точке D . Доказать, что $\triangle ACD$ равнобедренный.

13. Если около треугольника опишем окружность и из произвольной точки ее опустим перпендикуляры на стороны треугольника, то их основания лежат на одной прямой (прямая Симпсона).

У к а з а н и е. Доказательство основывается на свойствах вписанных углов (§ 124) и углов вписанного четырехугольника (§ 139).

Задачи на построение

14. На данной бесконечной прямой найти точку, из которой данный отрезок был бы виден под данным углом.

15. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и высоте.

16. К дуге данного сектора провести такую касательную, чтобы часть ее, заключенная между продолженными радиусами (ограничивающими сектор), равнялась данному отрезку (свести эту задачу к предыдущей).

17. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и медиане, проведенной к основанию.

18. Даны по величине и положению два отрезка a и b . Найти такую точку, из которой отрезок a был бы виден под данным углом α и отрезок b — под данным углом β .

19. В треугольнике найти точку, из которой его стороны были бы видны под равными углами.

У к а з а н и е. Обратить внимание на то, что каждый из этих углов должен равняться $\frac{4}{3}d$.

20. Построить треугольник по углу при вершине, высоте и медиане, проведенной к основанию.

У к а з а н и е. Продолжив медиану на равное расстояние и соединив полученную точку с концами основания, рассмотреть образовавшийся параллелограмм.

21. Построить треугольник, в котором даны: основание, прилежащий к нему угол и угол, составленный медианой, проведенной из вершины данного угла, и стороной, к которой эта медиана проведена.

22. Построить параллелограмм по двум его диагоналям и одному углу.

23. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и сумме или разности двух других сторон.

24. Построить четырехугольник по двум диагоналям, двум соседним сторонам и углу, образованному двумя другими сторонами.

25. Даны три точки A , B и C . Провести через A такую прямую, чтобы расстояние между перпендикулярами, опущенными на эту прямую из точек B и C , равнялось данному отрезку.

26. В данный круг вписать треугольник, у которого два угла даны.

27. Около данного круга описать треугольник, у которого два угла даны.

28. Построить треугольник по радиусу описанного круга, углу при вершине и высоте.

29. Вписать в данный круг треугольник, у которого известны: сумма двух сторон и угол, противолежащий одной из этих сторон.

30. Вписать в данный круг четырехугольник, у которого даны сторона и два угла, не прилежащие к этой стороне.

31. В данный ромб вписать круг.

32. В равносторонний треугольник вписать три круга, которые попарно касаются друг друга и из которых каждый касается двух сторон треугольника.

33. Построить четырехугольник, который можно было бы вписать в окружность, по трем его сторонам и одной диагонали.

34. Построить ромб по данной стороне и радиусу вписанного круга.

35. Около данного круга описать равнобедренный прямоугольный треугольник.

36. Построить равнобедренный треугольник по основанию и радиусу вписанного круга.

37. Построить треугольник по основанию и двум медианам, исходящим из концов основания. Указание, см. § 143.

38. То же по трем медианам. Указание, см. § 143.

39. Дана окружность и на ней точки A , B и C . Вписать в эту окружность такой треугольник, чтобы его биссектрисы при продолжении встречали окружность в точках A , B и C .

40. Та же задача, с заменой биссектрис треугольника его высотами.

41. Дана окружность и на ней три точки M , N и P , в которых пересекаются с окружностью (при продолжении) высота, биссектриса и медиана, исходящие из одной вершины вписанного треугольника. Построить этот треугольник.

42. На окружности даны две точки A и B . Из этих точек провести две параллельные хорды, сумма которых дана.

Задачи на вычисление

43. Вычислить вписанный угол, опирающийся на дугу, равную $\frac{1}{12}$ части окружности.

44. Круг разделен на два сегмента хордой, делящей окружность на части в отношении 5:7. Вычислить углы, которые вмещаются этими сегментами.

45. Две хорды пересекаются под углом в $36^{\circ}15'32''$. Вычислить в градусах, минутах и секундах две дуги, заключенные между сторонами этого угла и их продолжениями, если одна из этих дуг относится к другой, как 2:3.

46. Угол, составленный двумя касательными, проведенными из одной точки окружности, равен $25^{\circ}15'$. Вычислить дуги, заключенные между точками касания.

47. Вычислить угол, составленный касательной и хордой, если хорда делит окружность на две части, относящиеся, как 3:7.

48. Две окружности одинакового радиуса пересекаются под углом $\frac{2}{3}d$; определить в градусах меньшую из дуг, заключающихся между точками пересечения.

Примечание. Углом двух пересекающихся дуг называется угол, составленный двумя касательными, проведенными к этим дугам из точки пересечения.

49. Из одного конца диаметра проведена касательная, а из другого — секущая, которая с касательной составляет угол в $20^{\circ}30'$. Найти меньшую из дуг, заключенных между касательной и секущей.

ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ

I. ПОНЯТИЕ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ВЕЛИЧИН

144. Задача измерения отрезка. До сих пор, сравнивая между собой два отрезка, мы могли определить, равны ли они между собой, и если не равны, то какой из них больше. Нам приходилось это делать при изучении соотношений между сторонами и углами треугольника, при сравнении отрезка прямой с ломаной и в некоторых других случаях. Но такое сравнение отрезков между собой еще не дает точного представления о величине каждого из них.

Мы поставим теперь задачу установить точное понятие о длине отрезка и найти способы выражать эту длину при помощи числа.

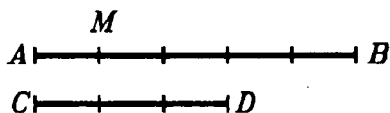


Рис. 162.

145. Общая мера. Общей мерой двух отрезков прямой называется такой третий отрезок, который в каждом из первых двух содержится целое число раз без остатка.

Так, если отрезок AM (рис. 162) содержится 5 раз в AB и 3 раза в CD , то AM есть общая мера AB и CD . Подобно этому можно говорить об общей мере двух дуг одинакового радиуса, двух углов и вообще двух однородных величин.

Замечание. Очевидно, что если отрезок AM есть общая мера отрезков AB и CD , то, разделив AM на 2, 3, 4 и так далее равные части, мы получим меньшие общие меры для отрезков AB и CD . Таким образом, если два отрезка имеют какую-нибудь общую меру, то можно сказать, что они имеют бесчисленное множество общих мер. Одна из них будет наибольшая.

146. Теоремы, на которых основано нахождение наибольшей общей меры. Чтобы найти наибольшую общую меру

двух отрезков, употребляют способ последовательного отложения, подобный тому последовательному делению, каким в арифметике находят наибольший общий делитель двух целых чисел. Этот способ основывается на следующих теориях.

1. Если меньший из двух отрезков (A и B , рис. 163) содержится в большем целое число раз без остатка, то наибольшая общая мера этих отрезков есть меньший из них.

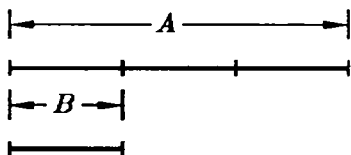


Рис. 163.

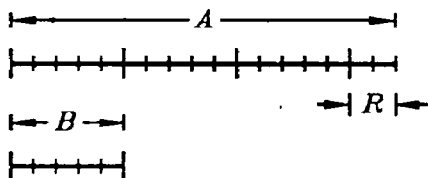


Рис. 164.

Пусть, например, отрезок B содержится в отрезке A ровно 3 раза; так как при этом, конечно, отрезок B содержится в самом себе ровно 1 раз, то B есть общая мера отрезков A и B ; с другой стороны, эта мера есть и наибольшая, так как никакой отрезок, больший B , не может содержаться в B целое число раз.

2. Если меньший из двух отрезков (B , рис. 164) содержится в большем (A) целое число раз с некоторым остатком (R), то наибольшая общая мера этих отрезков (если она существует) должна быть и наибольшей общей мерой меньшего отрезка (B) и остатка (R). Пусть, например,

$$A = B + B + B + R.$$

Из этого равенства мы можем вывести следующие два заключения:

1) Если существует отрезок, содержащийся без остатка в B и R , то он содержится также без остатка и в A ; если, например, какой-нибудь отрезок содержится в B ровно 5 раз и в R содержится ровно 2 раза, то в A он содержится $5+5+5+2$, т. е. 17 раз без остатка.

2) Обратно: если существует отрезок, содержащийся без остатка в A и B , то он содержится также без остатка и в R ; если, например, какой-нибудь отрезок содержится в A ровно 17 раз и в B ровно 5 раз, то в той части отрезка A , которая равна $3B$, он содержится 15 раз; следовательно, в остающейся части отрезка A , т. е. в R , он содержится $17-15$, т. е. 2 раза.

Таким образом, у двух пар отрезков $\overbrace{A \text{ и } B}$ $\overbrace{B \text{ и } R}$ должны быть одни и те же общие меры (если они существуют); поэтому и наибольшая общая мера у них должна быть одна и та же.

К этим двум теоремам надо еще добавить следующую аксиому измерения (аксиому Архимеда):

Как бы велик ни был больший отрезок (A) и как бы мал ни был меньший отрезок (B), всегда, откладывая меньший отрезок на большем последовательно 1, 2, 3 и так далее раз, мы получим, что после некоторого m -го отложения или не получится никакого остатка, или получится остаток, меньший меньшего отрезка (B); другими словами, всегда можно найти столь большое целое положительное число m , что $B \cdot m < A$, но $B \cdot (m+1) > A$.

147. Нахождение наибольшей общей меры двух отрезков. Пусть требуется найти наибольшую общую меру двух данных отрезков AB и CD (рис. 165).

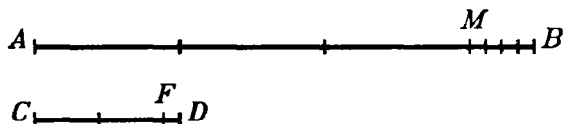


Рис. 165.

Для этого на большем отрезке откладываем (с помощью циркуля) меньший отрезок столько раз, сколько это возможно. При этом, согласно аксиоме измерения, случится одно из двух: или 1) CD уложится в AB без остатка, тогда искомая мера, согласно теореме 1-й, будет CD , или 2) получится некоторый остаток MB , меньший CD (как у нас на чертеже); тогда, согласно теореме 2-й, вопрос приведет к нахождению наибольшей общей меры двух меньших отрезков, именно CD и первого остатка MB . Чтобы найти ее, поступаем по предыдущему, т. е. откладываем MB на CD столько раз, сколько можно. И опять произойдет одно из двух: или 1) MB уложится в CD без остатка, тогда искомая мера будет MB , или 2) получится остаток FD , меньший MB (как у нас на чертеже); тогда вопрос приведет к нахождению наибольшей общей меры двух меньших отрезков, именно MB и второго остатка FD .

Продолжая этот прием далее, мы можем встретиться с такими двумя возможными случаями:

1) после некоторого отложения не получится никакого остатка или

2) процесс последовательного отложения не будет иметь конца (в предположении, что мы имеем возможность откладывать как угодно малые отрезки, что, конечно, возможно только теоретически).

В первом случае последний остаток и будет наибольшей общей мерой данных отрезков. Чтобы удобнее вычислить, сколько раз эта наибольшая общая мера содержится в данных отрезках, выписываем ряд равенств, получаемых после каждого отложения. Так, по нашему чертежу мы будем иметь:

$$\begin{array}{lll} \text{после первого отложения} & \dots & AB=3CD+MB; \\ \text{♦ второго} & \text{♦} & \dots & CD=2MB+FD; \\ \text{♦ третьего} & \text{♦} & \dots & MB=4FD. \end{array}$$

Переходя в этих равенствах от нижнего к верхнему, последовательно находим:

$$\begin{aligned} MB &= 4FD; \quad CD = (4FD) \cdot 2 + FD = 9FD; \\ AB &= (9FD) \cdot 3 + 4FD = 31FD. \end{aligned}$$

Подобно этому можно находить наибольшую общую меру двух дуг одинакового радиуса, двух углов и т. п.

Во втором случае данные отрезки не могут иметь общей меры. Чтобы обнаружить это, предположим, что данные отрезки AB и CD имеют какую-нибудь общую меру. Мера эта, как мы видели, должна содержаться целое число раз не только в AB и в CD , но и в остатке MB , следовательно, и во втором остатке FD , и в третьем, и в четвертом и т. д. Так как остатки эти идут, последовательно уменьшаясь, то в каждом из них общая мера должна содержаться меньшее число раз, чем в предыдущем остатке. Если, например, в MB общая мера содержится 100 раз (вообще m раз), то в FD она содержится менее 100 раз (значит, не более 99 раз); в следующем остатке она должна содержаться менее 99 раз (значит, не более 98 раз) и т. д. Так как ряд целых положительных уменьшающихся чисел: 100, 99, 98, ... (и вообще $m, m-1, m-2, \dots$) имеет конец (как бы велико ни было число m), то процесс последовательного отложения, при достаточном его продолжении, должен дойти до конца, т. е. мы дойдем до того, что уже не получится никакого остатка. Значит, если последовательное отложение не имеет конца, то данные отрезки никакой общей меры иметь не могут.

148. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки. Два отрезка прямой называются соизмеримыми, если они имеют

общую меру, и несоизмеримыми, когда такой общей меры не существует.

На практике нет возможности убедиться в существовании несоизмеримых отрезков, потому что, продолжая последовательное отложение, мы всегда дойдем до столь малого остатка, который в предыдущем остатке по-видимому укладывается целое число раз. Быть может при этом и должен был бы получиться некоторый остаток, но по причине неточности инструментов (циркуля) и несовершенства наших органов чувств (зрения) мы не в состоянии его заметить. Однако, как мы сейчас докажем, несоизмеримые отрезки существуют.

149. Теорема. Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной.

Так как диагональ делит квадрат на два равнобедренных прямоугольных треугольника, то теорему эту можно высказать иными словами так: *гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника несоизмерима с его катетом.*

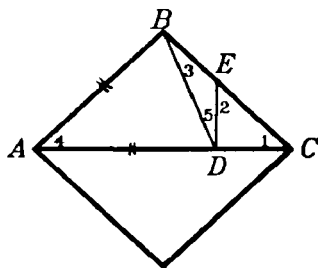


Рис. 166.

Предварительно докажем следующее свойство такого треугольника: если на гипотенузе (рис. 166) отложим отрезок AD , равный катету, и проведем $DE \perp AC$, то образовавшийся при этом прямоугольный треугольник DEC будет равнобедренный, а отрезок BE катета BC окажется равным отрезку DC гипотенузы. Чтобы убедиться в этом, проведем прямую BD и рассмотрим

углы треугольников DEC и BED . Так как треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный, то $\angle 1 = \angle 4$ и, следовательно, $\angle 1 = 45^\circ$, а потому в прямоугольном треугольнике DEC и $\angle 2 = 45^\circ$ и, значит, треугольник DEC имеет два равных угла и потому его стороны DC и DE равны.

В треугольнике BDE угол 3 равен прямому углу B без угла ABD , а угол 5 равен прямому углу ADE без угла ADB . Но $\angle ADB = \angle ABD$ (так как $AB = AD$); значит, $\angle 3 = \angle 5$. Но тогда треугольник BDE должен быть равнобедренный, и потому $BE = ED = DC$.

Заметив это, станем находить общую меру отрезков AB и AC . Так как $AC > AB$ и $AC < AB + BC$, т. е. $AC < 2AB$, то катет AB отложится на гипотенузе AC только один раз с некоторым остатком DC . Теперь надо этот остаток откладывать на AB ,

или, что все равно, на BC . Но отрезок BE , по доказанному, равен DC . Значит, надо DC отложить еще на EC . Но EC есть гипотенуза равнобедренного треугольника DEC . Следовательно, процесс отложения для нахождения общей меры сводится теперь к откладыванию катета DC прямоугольного равнобедренного треугольника DEC на его гипотенузу EC . В свою очередь это отложение сведется к откладыванию катета на гипотенузу нового, меньшего прямоугольного равнобедренного треугольника и т. д., очевидно, без конца. А если процесс этот не может окончиться, то общей мерой отрезков AC и AB не существует.

150. Понятие об измерении отрезков. Чтобы составить ясное представление о величине данного отрезка, его сравнивают с другим, уже известным нам отрезком, например с метром (этот известный отрезок, с которым сравнивают другие отрезки, называется *единицей длины*). При этом могут представиться два различных случая: или измеряемый отрезок соизмерим с единицей, или несоизмерим с ней.

1) *Измерить отрезок, соизмеримый с единицей, значит узнать, сколько раз в нем содержится единица или какая-нибудь доля единицы.*

Пусть, например, надо измерить какой-нибудь отрезок A (рис. 167) при помощи единицы B , соизмеримой с A . Тогда находят их общую меру и узнают, сколько раз она содержится в B и A . Если общей мерой окажется сам отрезок B , то результат измерения выразится целым числом. Так, ко-

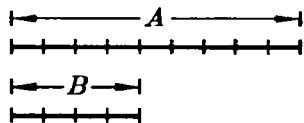


Рис. 167.

гда B содержится в A три раза, говорят, что длина отрезка A равна 3 единицам. Если же общей мерой будет некоторая доля B , то результат измерения выразится дробным числом. Так, если общая мера есть $\frac{1}{4}$ доля B и она содержится в A девять раз (как изображено на рис. 167), то говорят, что длина отрезка A равна $\frac{9}{4}$.

Число, получившееся после измерения, называется *частотой мерой* той величины, которая измерялась. Числа целые и дробные называются *рациональными числами*.

2) Когда данный отрезок A несоизмерим с единицей B , тогда измерение выполняется косвенно; вместо отрезка A измеряют два других отрезка, соизмеримых с единицей, из которых один меньше, а другой больше A и которые

разнятся от A как угодно мало. Чтобы найти такие соизмеримые отрезки, поступают так: положим, что мы желаем найти соизмеримые отрезки, которые отличались бы от A меньше, чем на $\frac{1}{10}$ единицы длины B . Тогда делим единицу B на 10 равных частей (рис. 168) и одну такую долю укладываем на отрезке A столько раз, сколько возможно. Пусть она уложится 13 раз с некоторым остатком, меньшим $\frac{1}{10} B$. Тогда мы будем иметь отрезок A_1 , соизмеримый с единицей и меньший, чем A . Отложив $\frac{1}{10} B$ еще один раз, получим другой отрезок, A_2 , тоже соизмеримый с единицей, но больший, чем A , и который разнится от A менее, чем на $\frac{1}{10}$ единицы. Длины отрезков A_1 и A_2 выражаются числами $\frac{13}{10}$ и $\frac{14}{10}$. Эти числа рассматриваются как приближенные меры длины отрезка A : первое с недостатком, второе с избытком. При этом, так как отрезок A разнится от A_1 и от A_2 менее, чем на $\frac{1}{10}$ единицы, то принято говорить, что каждое из этих чисел выражает длину отрезка A с точностью до $\frac{1}{10}$.

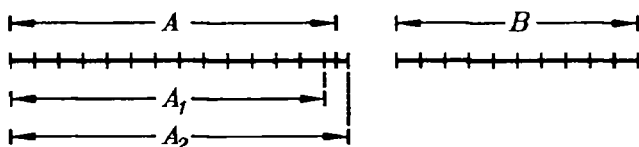


Рис. 168.

Вообще, чтобы найти приближенные меры длины отрезка A с точностью до $\frac{1}{n}$ единицы, делят единицу B на n равных частей и узнают, сколько раз $\frac{1}{n}$ -я доля единицы содержится в A ; если она содержится в A m раз с некоторым остатком, меньшим $\frac{1}{n} B$, то числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ считаются приближенными мерами длины отрезка A с точностью до $\frac{1}{n}$ -й, первое с недостатком, второе с избытком.

Заметим, что этим путем мы можем находить приближенные результаты измерения и тогда, когда измеряемый отрезок A соизмерим с единицей B ; только в этом случае мы, если пожелаем, можем найти также и точный результат, тогда как в случае несоизмеримости точного результата при помощи одних рациональных чисел мы получить не можем.

Для получения того числа, которое можно было бы принять за точную меру длины отрезка A , когда этот отрезок несоизмерим с единицей измерения, поступают следующим образом.

Вычисляют последовательно приближенную меру длины отрезка A с недостатком с точностью до $0,1$, затем ту же меру с недостатком с точностью до $0,01$, затем ее же с точностью до $0,001$ и продолжают беспрестанно этот процесс последовательного вычисления приближенной меры длины A , каждый раз повышая точность в 10 раз. При таком процессе будут получаться последовательно десятичные дроби сначала с одним десятичным знаком, затем с двумя, тремя и дальше все с большим и большим числом десятичных знаков. Неограниченное продолжение описанного процесса построения десятичных дробей определяет бесконечную непериодическую десятичную дробь. (Эта дробь не может оказаться периодической, иначе ее можно было бы обратить в обыкновенную, а отрезок A оказался бы соизмеримым с единицей длины.)

Из алгебры известно, что всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь определяет некоторое **иррациональное число**. К таким числам приводит, например, извлечение квадратного корня из числа в том случае, когда этот корень не извлекается точно. Так, $\sqrt{2}$ есть **иррациональное число**, представляемое бесконечной десятичной дробью ¹:

$$\sqrt{2} = 1,4142... .$$

Таким образом, бесконечная десятичная дробь, которая получается при приближенном измерении отрезка A , несоизмеримого с единицей B , определяет некоторое иррациональное число. Это число и принимается за точную меру длины A .

З а м е ч а н и е. К тому же самому иррациональному числу можно прийти, вычисляя последовательно приближенные значения длины отрезка A с точностью до $0,1$; $0,01$; $0,001$; ..., но не с недостатком, а с избытком. Действительно, два приближения, взятые с одинаковой десятичной точностью, одно с недостатком, другое с избытком, разнятся между собой лишь последним десятичным знаком. При последовательном повы-

¹ Бесконечную десятичную дробь нельзя, конечно, полностью записать на листе бумаги, так как число ее десятичных знаков бесконечно. Тем не менее её считают известной, если известен способ, при помощи которого можно определить любое число ее десятичных знаков.

шении степени точности этот последний знак будет отодвигаться все дальше и дальше вправо от запятой, число общих десятичных знаков обеих дробей будет становиться все больше и больше. При беспредельном продолжении процесса в обоих случаях получится, таким образом, одна и та же бесконечная десятичная дробь, т. е. одно и то же иррациональное число.

Точное значение бесконечной десятичной дроби считается бóльшим всякого ее приближенного значения, взятого с недостатком, и меньшим всякого ее приближенного значения, взятого с избытком.

151. Бесконечные десятичные дроби. Введение бесконечных десятичных дробей производится в алгебре на основе следующих определений.

Бесконечная десятичная дробь называется действительным числом.

Две бесконечные десятичные дроби считаются равными, если их десятичные знаки одинакового порядка равны.

Из двух неравных бесконечных десятичных дробей считается бóльшим действительным числом та дробь, в которой первый из неравных десятичных знаков одинакового порядка со второй дробью больше.

Если в бесконечной десятичной дроби все десятичные знаки, начиная с некоторого порядка, равны нулю, то дробь считается равной той конечной десятичной дроби, которая получится из данной зачеркиванием всех нулей, стоящих справа от последней значащей цифры. Так, бесконечная десятичная дробь 7,8530078000... равна конечной дроби 7,8530078. Бесконечная периодическая дробь с периодом 9 всегда заменяется конечной десятичной дробью, получаемой из данной увеличением на единицу ее последнего десятичного знака, отличного от 9, и отбрасыванием всех последующих девяток. Так дробь 3,72999... заменяют конечной дробью 3,73.

152. Приближенные значения бесконечной десятичной дроби. Если оборвать данную бесконечную десятичную дробь на ее n -м знаке, то полученная конечная дробь называется *приближенным значением бесконечной десятичной дроби* с точностью до $\frac{1}{10^n}$ с недостатком. Если же в этой дроби уве-

личить на единицу ее последний десятичный знак, т. е. прибавить к ней $\frac{1}{10^n}$, то получится новая конечная дробь, которая называется *приближенным значением бесконечной дроби* с той же точностью с избытком. Если приближенное значение действительного числа α с n десятичными знаками с недостатком обозначим через α_n , а с избытком через α'_n , то

$$\alpha'_n = \alpha_n + \frac{1}{10^n}.$$
 Из определения неравенства действительных чисел следует,

что действительное число больше всякого его приближенного значения с недостатком и меньше всякого его приближенного значения с избытком. Так,

пусть, например, дано действительное число, определяющее $\sqrt{2} = 1,414\dots$. Его приближенное значение с точностью до 0,01 с недостатком: 1,41, с избытком: 1,42; так как

$$\begin{aligned} 1,41 &= 1,41000 \\ 1,42 &= 1,42000, \end{aligned}$$

то, в силу определения неравенства действительных чисел, имеем:

$$1,41000\dots < 1,414\dots < 1,42000\dots, \text{ или } 1,41 < \sqrt{2} < 1,42.$$

153. Действия с действительными числами. Сложение. Пусть даны два действительных числа α и β . Возьмем их приближенные значения с произвольным числом n десятичных знаков сначала с недостатком, а затем с избытком. Приближенные значения чисел α и β с недостатком обозначим соответственно через α_n и β_n , а приближенные значения с избытком — через α'_n и β'_n . При этом:

$$\alpha'_n = \alpha_n + \frac{1}{10^n}, \quad \beta'_n = \beta_n + \frac{1}{10^n}. \quad (1)$$

Составим теперь суммы $\alpha_n + \beta_n$ и $\alpha'_n + \beta'_n$. Каждая из них есть десятичная дробь, содержащая n десятичных знаков.

Назовем первую γ_n , а вторую γ'_n :

$$\alpha_n + \beta_n = \gamma_n, \quad \alpha'_n + \beta'_n = \gamma'_n.$$

Складывая почленно равенства (1), получим:

$$\alpha'_n + \beta'_n = \alpha_n + \beta_n + \frac{2}{10^n},$$

или $\gamma'_n = \gamma_n + \frac{2}{10^n}$. Это равенство показывает, что дробь γ'_n получается из

дроби γ_n прибавлением двух единиц к ее последнему десятичному знаку. Будем теперь увеличивать n . В таком случае дробь γ_n приведет к образованию бесконечной десятичной дроби, которую обозначим γ . Эта дробь может оказаться или периодической, или непериодической. Допустим, что дробь γ непериодическая. В таком случае она должна содержать бесчисленное множество десятичных знаков, отличных от 9. В этом случае в дроби γ число десятичных знаков, отличных от 9, должно возрастать с возрастанием n . Так как прибав-

ка к дроби γ_n числа $\frac{2}{10^n}$ не может оказать влияния на ее десятичные знаки,

стоящие левее двух последних знаков, отличных от 9, то число общих первых десятичных знаков в дробях γ_n и γ'_n будет неограниченно возрастать с возрастанием n . Следовательно, дробь γ'_n будет приводить к той же бесконечной десятичной дроби, что и дробь γ_n . При этом из предыдущего следует, что при любом n

$$\gamma_n < \gamma < \gamma'_n. \quad (2)$$

Допустим теперь, что дробь γ периодическая. В таком случае она представляет собой некоторое рациональное число. Это число, как нетрудно сообщить, также удовлетворяет неравенствам (2).

О п р е д е л е н и е. Действительное число γ , удовлетворяющее неравенствам (2), называется суммой действительных чисел α и β :

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

154. Другие действия с действительными числами. Совершенно аналогичным образом можно определить разность двух действительных чисел, их произведение и частное от деления одного действительного числа на другое. Более подробное изучение результатов этих действий показывает, что определенные таким образом сумма и произведение действительных чисел подчиняются основным законам действий, имеющим место для чисел рациональных: сложение подчиняется переместительному и сочетательному законам:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$$

а умножение — переместительному, сочетательному и распределительному законам:

$$\alpha\beta = \beta\alpha, (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

В тех случаях, когда бесконечные десятичные дроби будут периодическими, определенные выше действия над ними будут приводить, как легко показать, к тем же результатам, что и действия над обыкновенными дробями, получаемыми после обращения периодических дробей в простые.

Таким образом, рациональные числа являются лишь частным видом действительных чисел.

155. Отношение двух отрезков. Число, получаемое в результате измерения отрезка A , называется численной мерой отрезка. Если отрезок A соизмерим с единицей измерения, то его численная мера есть число рациональное. Если он несоизмерим с единицей длины, то его численная мера есть иррациональное число, представляемое бесконечной непериодической десятичной дробью.

В дальнейшем под длиной отрезка мы будем подразумевать его численную меру при определенной единице измерения. Под отношением двух отрезков — отношение их численных мер.

Отношение двух отрезков не зависит от того, как выбрана единица измерения. В самом деле, если, например, вместо одной уже выбранной единицы измерения взять другую, в 3 раза меньшую, то в каждом отрезке эта новая единица уложится втрое большее число раз, чем прежняя. В той дроби, которая представляет отношение отрезков, числитель и знаменатель оба увеличатся в 3 раза. Величина же самой дроби от этого не изменится. Если данные отрезки соизмеримы, то при вычислении их отношения за единицу измерения удобно взять их общую меру. В таком случае сразу станет ясно, что отношение двух соизмеримых отрезков равно отношению чисел, показывающих, сколько раз их общая мера укладывается в каждом из них.

II. ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

156. Предварительные понятия. В окружающей нас жизни часто встречаются фигуры, имеющие различные размеры, но одинаковую форму. Таковы, например, одинаковые фотографии одного и того же лица, изготовленные в различных размерах, или планы здания или целого города, вычерченные в различных размерах. Такие фигуры принято называть подобными. Умение измерять длины отрезков позволяет точно определить понятие о геометрическом подобии фигур и дать способы изменения размеров фигуры без изменений ее формы. Изменение размеров фигуры без изменения ее формы называется подобным преобразованием данной фигуры. Изучение подобия фигур мы начнем с простейшего случая, именно с подобия треугольников.

157. Сходственные стороны. В этой главе рассматриваются такие треугольники, у которых углы одного соответственно равны углам другого. Условимся в таких случаях называть сходственными те стороны этих треугольников, которые лежат между соответственно равными углами (такие стороны также и противолежат равным углам).

158. Определение. *Два треугольника называются подобными, если: 1) углы одного соответственно равны углам другого и 2) стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого.*

Что такие треугольники возможны, показывает следующая лемма.

159. Лемма¹. *Прямая (DE , рис. 169), параллельная какой-нибудь стороне (AC) треугольника (ABC), отсекает от него треугольник (DBE), подобный данному. Пусть в треугольнике ABC прямая DE параллельна стороне AC . Требуется доказать, что треугольник DBE подобен треугольнику ABC .*

Предстоит доказать, во-первых, равенство углов и, во-вторых, пропорциональность сходственных сторон треугольников ABC и DBE .

¹ Леммой называется вспомогательная теорема, которая излагается для того, чтобы при её помощи доказать следующую за ней теорему.

1. Углы треугольников соответственно равны, так как угол B у них общий, а $\angle D = \angle A$ и $\angle E = \angle C$, как соответственные углы при параллельных DE и AC и секущих AB и CB .

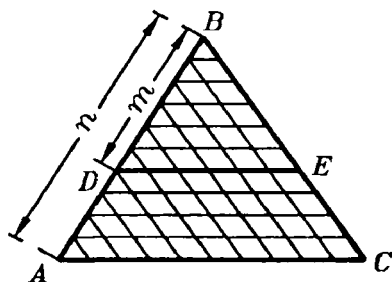


Рис. 169.

2. Докажем теперь, что стороны $\triangle DBE$ пропорциональны сходственным сторонам $\triangle ABC$, т. е. что

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}.$$

Для этого рассмотрим отдельно следующие два случая.

1) Стороны AB и DB имеют общую меру. Разделим AB на части, равные этой общей мере. Тогда BD

разделится на целое число таких частей. Пусть этих частей содержится m в BD и n в AB . Проведем из точек деления ряд прямых, параллельных AC , и другой ряд прямых, параллельных BC . Тогда BE и BC разделятся на равные части, которых будет m в BE и n в BC . Точно так же DE разделится на m равных частей, а AC на n равных частей, причем части DE равны частям AC (как противоположные стороны параллелограммов). Теперь очевидно, что

$$\frac{BD}{BA} = \frac{m}{n}; \quad \frac{BE}{BC} = \frac{m}{n}; \quad \frac{DE}{AC} = \frac{m}{n}.$$

Следовательно,
$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}.$$

2) Стороны AB и DB не имеют общей меры (рис. 170).

Найдем приближенные значения каждого из отношений $\frac{BD}{BA}$ и $\frac{BE}{BC}$ сначала с точностью до $\frac{1}{10}$, затем до $\frac{1}{100}$ и далее будем последовательно повышать степень точности в 10 раз. Для этого разделим сторону AB сначала на 10 равных частей и через точки деления проведем прямые, параллельные AC . Тогда сторона BC разделится также на 10 равных частей. Предположим, что $\frac{1}{10}$ доля в AB укладывается в BD m раз, причем остается остаток, меньший $\frac{1}{10} AB$. Тогда, как видно из рисунка 170, $\frac{1}{10}$ доля BC укладывается в BE также m раз и остается остаток, меньший $\frac{1}{10} BC$. Следовательно, с точностью до $\frac{1}{10}$ имеем:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{m}{10}; \quad \frac{BE}{BC} = \frac{m}{10}.$$

Далее, разделим AB на 100 равных частей и предположим, что $\frac{1}{100}AB$ укладывается m_1 раз в BD . Проводя опять через точки деления прямые, параллельные AC , убеждаемся, что $\frac{1}{100}BC$ укладывается в BE также m_1 раз. Поэтому с точностью до $\frac{1}{100}$ имеем:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{m_1}{100} \text{ и } \frac{BE}{BC} = \frac{m_1}{100}.$$

Повышая, далее, степень точности в 10, 100, ... раз, убеждаемся, что приближенные значения отношений $\frac{BD}{BA}$ и $\frac{BE}{BC}$,

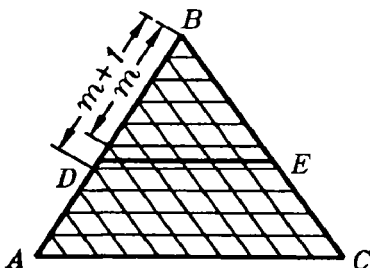


Рис. 170.

вычисленные с произвольной, но одинаковой десятичной точностью, равны. Следовательно, точные значения этих отношений выражаются одной и той же бесконечной десятичной дробью; значит:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}.$$

Точно так же, проводя через точки деления стороны AB прямые, параллельные стороне BC , найдем, что

$$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}.$$

Таким образом, и в этом случае имеем:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}.$$

160. Замечания: 1) Доказанные соотношения представляют собой три следующие пропорции:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}; \quad \frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}; \quad \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}.$$

Переставив в них средние члены, получим:

$$\frac{BD}{BE} = \frac{BA}{BC}; \quad \frac{BD}{DE} = \frac{BA}{AC}; \quad \frac{BE}{DE} = \frac{BC}{AC}.$$

Таким образом, если в треугольниках стороны пропорциональны, то отношение любых двух сторон одного треугольника равно отношению сходственных сторон другого треугольника.

2) Подобие фигур обозначается иногда знаком $\sim$.

Три признака подобия треугольников

161. Теоремы. Если в двух треугольниках:

1) *два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого; или*

2) *две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, лежащие между этими сторонами, равны; или*

3) *если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.*

1) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 171) будут два треугольника, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и, следовательно, $\angle C = \angle C_1$. Требуется доказать, что такие треугольники подобны.

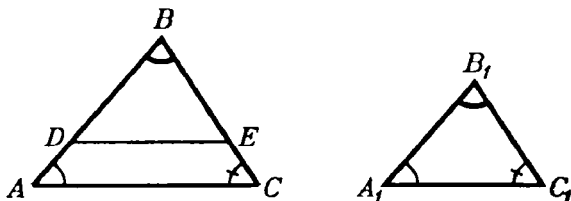


Рис. 171.

Отложим на AB отрезок BD , равный A_1B_1 , и проведем $DE \parallel AC$.

Тогда получим вспомогательный $\triangle DBE$, который, согласно доказанной выше лемме, подобен $\triangle ABC$. С другой стороны, $\triangle DBE \sim \triangle A_1B_1C_1$, потому что у них: $BD = A_1B_1$ (по построению), $\angle B = \angle B_1$ (по условию) и $\angle D = \angle A_1$ (потому что $\angle D = \angle A$ и $\angle A = \angle A_1$). Но очевидно, что если из двух равных треугольников один подобен третьему, то и другой ему подобен; следовательно, $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

2) Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 172) дано:

$$\angle B = \angle B_1 \text{ и } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}. \quad (1)$$

Требуется доказать, что такие треугольники подобны.

Отложим снова на AB отрезок BD , равный A_1B_1 , и проведем $DE \parallel AC$. Тогда получим вспомогательный $\triangle DBE$, подобный $\triangle ABC$. Докажем, что он равен $\triangle A_1B_1C_1$. Из подобия треугольников ABC и DBE следует:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE}. \quad (2)$$

Сравнивая эту пропорцию с данной пропорцией (1), замечаем, что первые отношения обеих пропорций одинаковы ($DB = A_1B_1$ по построению); следовательно, остальные отношения этих пропорций тоже равны, т. е. $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{BE}$.

Но если в пропорции предыдущие члены равны, то должны быть равны и последующие члены, значит: $B_1C_1 = BE$.

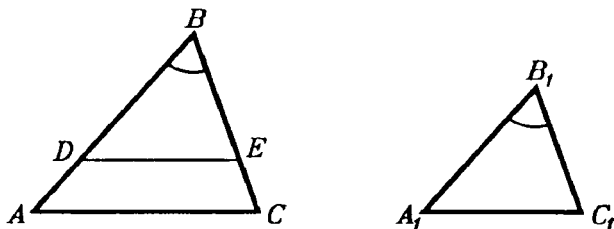


Рис. 172.

Теперь видим, что треугольники DBE и $A_1B_1C_1$ имеют по равному углу ($\angle B = \angle B_1$), заключенному между соответственно равными сторонами; значит, эти треугольники равны. Но $\triangle DBE$ подобен $\triangle ABC$, поэтому и $\triangle A_1B_1C_1$ подобен $\triangle ABC$.

3) Пусть в треугольниках $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 173) дано:

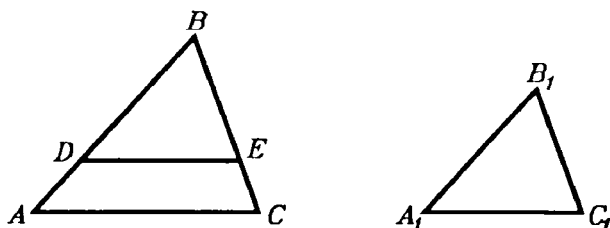
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}. \quad (1)$$


Рис. 173.

Требуется доказать, что такие треугольники подобны.

Сделав построение такое же, как и прежде, покажем, что $\triangle DBE \sim \triangle A_1B_1C_1$. Из подобия треугольников ABC и DBE следует:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE}. \quad (2)$$

Сравнивая этот ряд отношений с данным рядом (1), замечаем, что первые отношения у них равны, следовательно, и

остальные отношения равны, и потому $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{BE}$, откуда $B_1C_1 = BE$ и $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AC}{DE}$, откуда $A_1C_1 = DE$.

Теперь видим, что треугольники DBE и $A_1B_1C_1$ имеют по три соответственно равные стороны; значит, они равны. Но один из них, именно $\triangle DBE$, подобен $\triangle ABC$; следовательно, и другой $\triangle A_1B_1C_1$ подобен $\triangle ABC$.

162. Замечания о приеме доказательства. Полезно обратить внимание на то, что прием доказательства, употребленный нами в трех предыдущих теоремах, один и тот же, а именно: отложив на стороне большего треугольника отрезок, равный сходственной стороне меньшего, и проведя прямую, параллельную другой стороне, мы образуем вспомогательный треугольник, подобный большему данному. После этого, в силу условия доказываемой теоремы и свойства подобных треугольников, мы обнаруживаем равенство вспомогательного треугольника меньшему данному и, наконец, заключаем о подобии данных треугольников.

Признаки подобия прямоугольных треугольников

163. Два признака, не требующие особого доказательства. Так как прямые углы всегда равны друг другу, то, на основании доказанных признаков подобия треугольников, мы можем утверждать, что *если в двух прямоугольных треугольниках:*

- 1) *острый угол одного равен острому углу другого или*
- 2) *катеты одного пропорциональны катетам другого, то такие треугольники подобны.*

164. Признак, требующий особого доказательства.

Теорема. *Если гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники подобны.*

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника (рис. 174), у которых углы B и B_1 прямые и

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}. \quad (1)$$

Требуется доказать, что такие треугольники подобны.

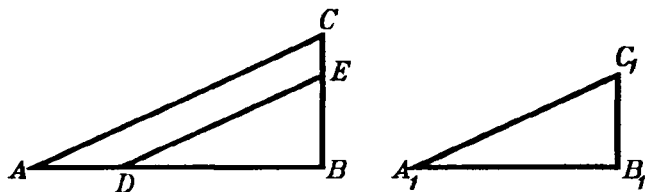


Рис. 174.

Для доказательства применим тот же прием, которым мы пользовались ранее. На AB отложим $BD=A_1B_1$ и проведем $DE \parallel AC$. Тогда получим вспомогательный $\triangle DBE$, подобный $\triangle ABC$. Докажем, что он равен $\triangle A_1B_1C_1$. Из подобия треугольников ABC и DBE следует:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DE}. \quad (2)$$

Сравнивая эту пропорцию с данной (1), находим, что первые отношения их одинаковы; следовательно, равны и вторые отношения, т. е.

$$\frac{AC}{DE} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

откуда

$$DE=A_1C_1.$$

Теперь видим, что треугольники DBE и $A_1B_1C_1$ имеют по равной гипотенузе и равному катету, следовательно, они равны; а так как один из них подобен $\triangle ABC$, то и другой ему подобен.

165. Теорема (об отношении высот). В подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны сходственным высотам, т. е. тем высотам, которые опущены на сходственные стороны.

Действительно, если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 175) подобны, то прямоугольные треугольники BAD и $B_1A_1D_1$ также подобны ($\angle A = \angle A_1$ и $\angle D = \angle D_1$); поэтому:

$$\frac{BD}{B_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

166. Делительный циркуль. На подобии треугольников основано употребление делительного циркуля, посредством

которого можно быстро разделить данный небольшой отрезок на несколько равных частей.

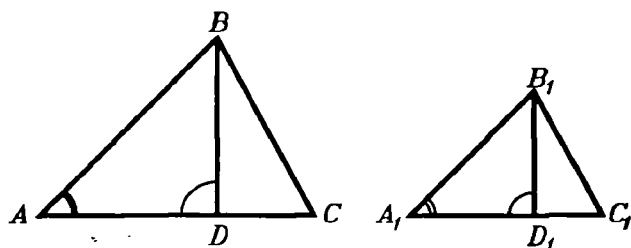


Рис. 175.

Прибор этот состоит из двух одинаковых ножек (рис. 176) Ab и Ba , концы которых заострены. Вдоль ножек сделаны прорезы, в которых можно передвигать подвижный винт и закреплять его в том или другом месте ножек. Ножки

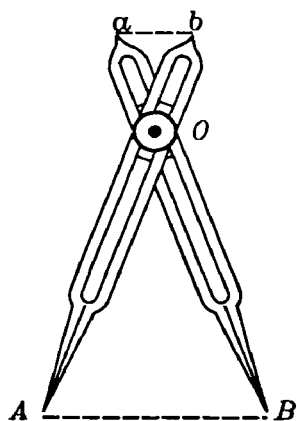


Рис. 176.

можно раздвигать и сближать, вращая их вокруг винта. Положим, требуется разделить отрезок AB на три равные части. Для этого укрепим винт в такой точке O , чтобы расстояние AO было в 3 раза больше расстояния Ob (что легко выполнить по тем делениям и цифрам, которые представлены по краям прореза). Затем растворяем циркуль и располагаем его так, как указано на рисунке. Тогда расстояние между остриями a и b будет составлять $\frac{1}{3}$ длины AB , так как из подобия треугольников AOB и aOb следует:

$$ab:AB=Ob:OA=1:3.$$

Остается затем, перевернув циркуль, отложить на отрезке AB 3 раза отрезок ab .

167. Поперечный масштаб. На свойствах подобных треугольников основано также изготовление поперечного масштаба, устройство которого понятно из рисунка 177.

Пусть крупные деления линии AB представляют в уменьшенном виде метры. Тогда мелкие деления представляют дециметры. Чтобы получить сантиметры, пришлось бы подразделить мелкие деления еще на 10 равных частей, что,

по причине малости этих частей, было бы невыполнимо на

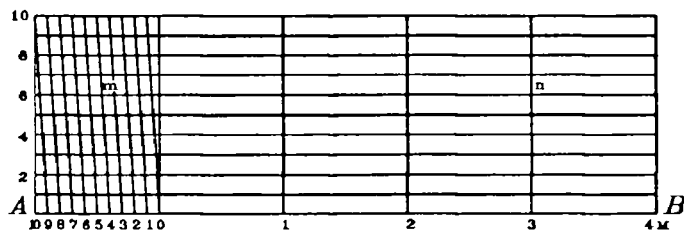


Рис. 177.

линейном масштабе (т. е. на самой линии AB). Поперечный масштаб позволяет отсчитывать и сантиметры. Для разъяснения этого изобразим отдельно в увеличенном виде (рис. 178) тот узкий прямоугольный треугольник, который на нашем рисунке расположен вправо.

Параллельные линии отсекают от этого треугольника подобные треугольники, и потому мы можем написать пропорции:

$$de:ab=ce:cb=1:10;$$

$$fh:ab=ch:cb=2:10 \text{ и т. д.};$$

значит,

$$de = \frac{1}{10} ab; \quad fh = \frac{2}{10} ab \text{ и т. д.}$$

Теперь понятно, что если мы возьмем на нашем масштабе циркулем отрезок, положим, от точки m до точки n (рис. 177), то этот отрезок составит:

$$3 \text{ м } 4 \text{ дм } 6 \text{ см} = 3,46 \text{ м.}$$

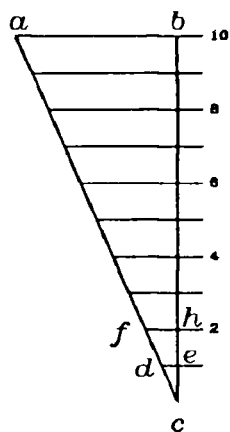


Рис. 178.

III. ПОДОБИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

168. Определение. Два одноименных многоугольника¹ называются **подобными**, если углы одного равны соответственно углам другого, а стороны, заключающие равные углы, пропорциональны. Это значит, что если многоугольник

¹ Одноименными называются многоугольники, имеющие одинаковое число углов, а следовательно, и сторон.

$ABCDE$ подобен многоугольнику $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 179), то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$ и

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}.$$

При этом стороны многоугольников AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , CD и C_1D_1 и т.д. называются сходственными сторонами.

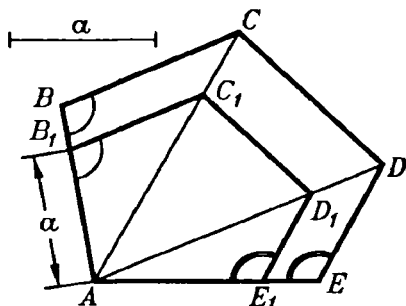


Рис. 179.

Что такие многоугольники возможны, будет видно из решения следующей задачи.

169. Задача. Дан многоугольник $ABCDE$ и отрезок a . Построить другой многоугольник, который был бы подобен данному и у которого сторона, сходственная стороне AB данного многоугольника, равнялась бы a (рис. 179).

Всего проще это можно сделать так. На стороне AB отложим $AB_1 = a$ (если $a > AB$, то точка B_1 расположится на продолжении AB). Затем, проведя из A все диагонали, построим $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$ и $D_1E_1 \parallel DE$.

Тогда получим многоугольник $AB_1C_1D_1E_1$, подобный многоугольнику $ABCDE$.

Действительно, во-первых, углы одного из них соответственно равны углам другого; так, угол A у них общий, $\angle B_1 = \angle B$ и $\angle E_1 = \angle E$, как соответственные углы при параллельных прямых; $\angle C_1 = \angle C$ и $\angle D_1 = \angle D$, так как углы эти состоят из частей, соответственно равных друг другу.

Во-вторых, мы имеем пропорции:

из подобия треугольников AB_1C_1 и ABC : $\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC}$;

• • • AC_1D_1 и ACD : $\frac{AC_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{AD_1}{AD}$;

• • • AD_1E_1 и ADE : $\frac{AD_1}{AD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{AE_1}{AE}$.

Так как третье отношение первого ряда равно первому отношению второго ряда и третье отношение второго ряда равно первому отношению третьего ряда, то, значит, все 9 от-

ношений равны между собой. Выбросив из них отношения, в которые входят диагонали, можем написать:

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{AE_1}{AE}.$$

Мы видим, таким образом, что у одноименных многоугольников $ABCDE$ и $AB_1C_1D_1E_1$ углы соответственно равны и сходственные стороны пропорциональны; значит, многоугольники эти подобны.

170. З а м е ч а н и е. Для треугольников, как мы видели (§ 161), равенство влечет за собой пропорциональность сторон и, обратно, пропорциональность сторон влечет за собой равенство углов; вследствие этого для треугольников одно равенство углов или одна пропорциональность сторон служит достаточным признаком их подобия. Для многоугольников же одного равенства углов или одной пропорциональности сторон еще недостаточно для их подобия; например, у квадрата и прямоугольника углы равны, но стороны не пропорциональны, у квадрата же и ромба стороны пропорциональны, а углы не равны.

171. Т е о р е м а (о разложении подобных многоугольников на подобные треугольники). *Подобные многоугольники можно разложить на одинаковое число подобных и одинаково расположенных треугольников.*

Например, подобные многоугольники $ABCDE$ и $AB_1C_1D_1E_1$ (рис. 179) разделены диагоналями на подобные треугольники, одинаково расположенные.

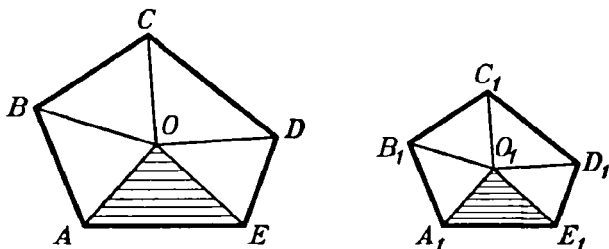


Рис. 180.

Укажем еще такой способ разложения. Возьмем внутри многоугольника $ABCDE$ (рис. 180) произвольную точку O и соединим ее со всеми вершинами. Тогда многоугольник $ABCDE$ разобьется на столько треугольников, сколько в нем сторон. Возьмем один из них, например AOE (покрытый на

чертеже штрихами), и на сходственной стороне A_1E_1 другого многоугольника построим углы $O_1A_1E_1$ и $O_1E_1A_1$, соответственно равные углам OAE и OEA ; точку пересечения O_1 соединим с прочими вершинами многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$. Тогда и этот многоугольник разобьется на то же число треугольников. Докажем, что треугольники первого многоугольника соответственно подобны треугольникам второго многоугольника. $\triangle AOE$ подобен $\triangle A_1O_1E_1$ по построению.

Чтобы доказать подобие соседних треугольников ABO и $A_1B_1O_1$, примем во внимание, что из подобия многоугольников следует, что

$$\angle BAE = \angle B_1A_1E_1 \text{ и } \frac{BA}{B_1A_1} = \frac{AE}{A_1E_1}, \quad (1)$$

из подобия треугольников OAE и $A_1O_1E_1$ выводим:

$$\angle OAE = \angle O_1A_1E_1 \text{ и } \frac{AO}{A_1O_1} = \frac{AE}{A_1E_1}. \quad (2)$$

Из равенства (1) и (2) следует:

$$\angle BAO = \angle B_1A_1O_1 \text{ и } \frac{BA}{B_1A_1} = \frac{AO}{A_1O_1}.$$

Теперь видим, что треугольники ABO и $A_1B_1O_1$ имеют по равному углу, заключенному между пропорциональными сторонами; значит, они подобны.

Совершенно так же докажем подобие треугольников BCO и $B_1C_1O_1$, затем треугольников COD и $C_1O_1D_1$ и т. д. При этом очевидно, что подобные треугольники в обоих многоугольниках одинаково расположены.

172. Теорема (об отношении периметров подобных многоугольников). *Периметры подобных многоугольников относятся, как сходственные стороны.*

Пусть многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 180) подобны; тогда по определению:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}.$$

Если имеем ряд равных отношений, то сумма всех предыдущих членов относится к сумме всех последующих, как какой-нибудь из предыдущих членов относится к своему последующему, поэтому

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \dots$$

173. Коэффициент подобия. Отношение сходственных сторон двух подобных многоугольников (или треугольников)

называется коэффициентом подобия этих многоугольников (или треугольников).

174. Подобное преобразование многоугольников. Построение многоугольника, подобного данному, при заданном коэффициенте подобия называется подобным преобразованием данного многоугольника.

Способ построения многоугольника, подобного данному, изложенный в § 169, является частным видом подобного преобразования. Общий метод (такого преобразования) состоит в следующем. Пусть требуется подобно преобразовать четырехугольник $ABCD$ (рис. 181) при коэффициенте подобия, равном k . Возьмем какую-нибудь точку O на плоскости; соединив ее с вершинами данного четырехугольника, получим прямые OA , OB , OC и OD . На прямой OA отложим от точки O в сторону точки A отрезок OA_1 , равный $k \cdot OA$, так что $OA_1 = k \cdot OA$ (на рисунке $k = 5/3$).

Продолжим также прямую OB и отложим на ней от точки O в сторону точки B отрезок OB_1 , равный $k \cdot OB$, так что $OB_1 = k \cdot OB$.

Точно так же поступим с прямыми OC и OD . Мы получим на них точки C_1 и D_1 , причем $OC_1 = k \cdot OC$ и $OD_1 = k \cdot OD$. Соединив последовательно точки A_1 , B_1 , C_1 и D_1 , получим искомый четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. В самом деле, из равенств $OA_1 = k \cdot OA$, $OB_1 = k \cdot OB$, $OC_1 = k \cdot OC$ и $OD_1 = k \cdot OD$ следует:

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{OC_1}{OC} = \frac{OD_1}{OD} = k.$$

Сравним треугольники OAB и OA_1B_1 . Они имеют общий угол в вершине O и, кроме того,

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB},$$

следовательно, эти треугольники подобны (§ 161, 2-й случай). Из их подобия заключаем:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA} = k \text{ и } \angle OAB = \angle OA_1B_1, \quad (1)$$

следовательно, $AB \parallel A_1B_1$.

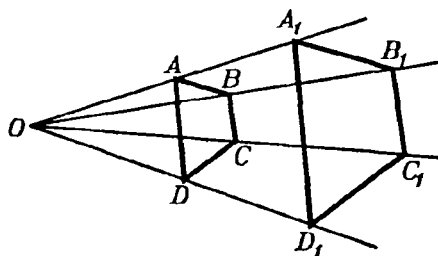


Рис. 181.

Совершенно так же покажем, что треугольники OBC и OB_1C_1 подобны. Отсюда следует:

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{OB_1}{OB} = k, \quad \angle OBC = \angle OB_1C_1, \quad (2)$$

и, следовательно, $BC \parallel B_1C_1$.

Таким же образом докажем подобие следующих треугольников: OCD и OC_1D_1 , затем треугольников OAD и OA_1D_1 . Из подобия $\triangle OCD$ и $\triangle OC_1D_1$ следует:

$$\frac{C_1D_1}{CD} = \frac{OC_1}{OC} = k \text{ и } CD \parallel C_1D_1. \quad (3)$$

Из подобия $\triangle OAD$ и $\triangle OA_1D_1$ следует:

$$\frac{A_1D_1}{AD} = \frac{OD_1}{OD} = k \text{ и } AD \parallel A_1D_1. \quad (4)$$

Из равенств (1), (2), (3) и (4) следует:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{A_1D_1}{AD} = k.$$

Кроме того, $\angle DAB = \angle D_1A_1B_1$, как углы с параллельными сторонами.

По той же причине имеем равенство углов:

$$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1, \quad \angle BCD = \angle B_1C_1D_1, \quad \angle CDA = \angle C_1D_1A_1.$$

Мы видим, таким образом, что у четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ углы соответственно равны и сходственные стороны пропорциональны; значит, эти четырехугольники подобны, причем коэффициент их подобия равен k .

175. Центр подобия. При подобном преобразовании многоугольника способом, изложенным в § 174, точка O называется центром подобия обоих многоугольников.

Подобное преобразование многоугольника можно выполнять несколько иначе. Именно, взяв точку O и соединив ее с вершинами четырехугольника $ABCD$, можно продолжить прямые $OA, OB, \dots$ за точку O ; затем на прямой OA от точки O в сторону, противоположную точке A , отложим отрезок OA' , равный $k \cdot OA$. Точно так же на продолжениях прямых $OB, OC, \dots$ от точки O отложим отрезки $OB', OC', \dots$, равные соответственно отрезкам $k \cdot OB, k \cdot OC, \dots$ (рис. 182); соединив последовательно точки A', B', C', D' , получим четырехугольник $A'B'C'D'$, очевидно симметричный $A_1B_1C_1D_1$ относительно точки O . Следовательно, четырехугольники $A'B'C'D'$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны и, значит, четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ подобны, причем коэффициент их подобия равен k .

При первом способе преобразования точка O называется внешним центром подобия многоугольников (рис. 181); при втором способе — внутренним центром их подобия (рис. 182).

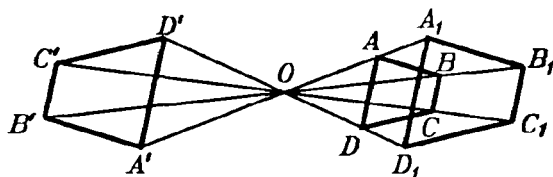


Рис. 182.

Замечание. При выполнении преобразования можно одинаково пользоваться как внутренним, так и внешним центром подобия. И тот и другой можно выбирать совершенно произвольно. В частности, если принять одну из вершин многоугольника за внешний центр подобия и выполнить подобное преобразование, то получим как раз тот способ построения подобного многоугольника, который был изложен в § 169.

176. Перспективное расположение подобных многоугольников. Расположение двух многоугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ на рисунке 181, а также многоугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ на рисунке 182 имеет следующие свойства: 1) сходственные стороны обоих многоугольников параллельны; 2) прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке.

Такое расположение двух многоугольников называется **перспективным**. Докажем, что в такое расположение можно привести любые два подобных многоугольника.

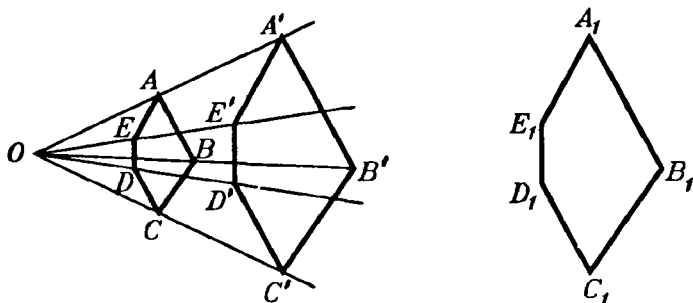


Рис. 183.

Пусть даны два подобных многоугольника $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 183). Возьмем какую-либо точку O за центр подобия и построим многоугольник, подобный и перспективный с $ABCDE$, причем коэффициент подобия возьмем равным отношению $\frac{A_1B_1}{AB}$. Мы получим многоугольник $A'B'C'D'E'$,

подобный $ABCDE$, и в то же время равный $A_1B_1C_1D_1E_1$. В самом деле, так как коэффициент подобия многоугольников $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ равен $\frac{A_1B_1}{AB}$,

то $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A_1B_1}{AB}$, откуда $A'B' = A_1B_1$. Но многоугольники $A_1B_1C_1D_1E_1$ и $A'B'C'D'E'$ подобны между собой, следовательно,

$$\frac{A'B'}{A_1B_1} = \frac{B'C'}{B_1C_1} = \frac{C'D'}{C_1D_1} = \frac{D'E'}{D_1E_1} = \frac{A'E'}{A_1E_1}.$$

А потому из равенства $A'B' = A_1B_1$ вытекает $B'C' = B_1C_1$, $C'D' = C_1D_1$, $D'E' = D_1E_1$, $A'E' = A_1E_1$. Так как, кроме того, углы многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ равны соответствующим углам многоугольника $A'B'C'D'E'$, то эти многоугольники равны между собой. Если наложить многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ на $A'B'C'D'E'$ так, чтобы они совпали, то многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ примет перспективное расположение с $ABCDE$.

IV. ПОДОБИЕ ФИГУР ПРОИЗВОЛЬНОГО ВИДА

177. Способ подобного преобразования многоугольников, изложенный выше, дает возможность обобщить само понятие о подобии на случай, когда фигура образована кривыми линиями. Именно такой способ построения подобной фигуры можно применить к любой фигуре. Пусть, например, на плоскости дана фигура A совершенно произвольной формы (рис. 184).

Возьмем произвольную точку O на плоскости этой фигуры и будем соединять ее с различными точками $M, N, P, \dots$ фигуры A . На каждой из проведенных прямых $OM, ON, OP, \dots$ отложим отрезки OM_1, ON_1, OP_1 такие, что:

$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{ON_1}{ON} = \frac{OP_1}{OP} = \dots$$

Точки $M_1, N_1, P_1, \dots$ будут лежать на некоторой новой фигуре A_1 . Чем больше точек $M, N, P, \dots$ мы возьмем на фигуре A , тем больше мы получим точек фигуры A_1 .

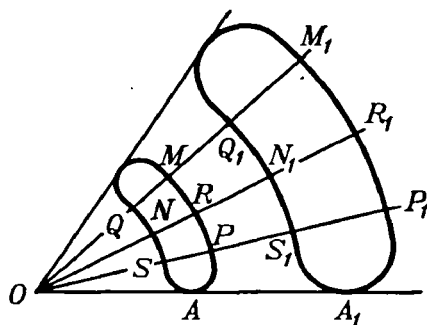


Рис. 184.

Чтобы получить всю фигуру A_1 , нужно провести прямые из точки O ко всем точкам фигуры A и построить на них соответствующие точки фигуры A_1 . Вся полученная таким образом фигура A_1 называется фигурой, подобной A . В отдельных случаях, чтобы получить фигуру A_1 , нет необходимости проводить лучи ко всем точкам фигуры A , достаточно построить лишь несколько ее точек и затем, пользуясь частными свойствами фигуры A , восстановить всю фигуру A_1 . Так, в том случае, когда A — многоугольник, достаточно

было соединить точку O лишь с вершинами этого многоугольника и построить вершины подобного многоугольника, а затем соединить прямолинейными от-

резками полученные вершины между собой. Такой переход от фигуры A к фигуре A_1 называется подобным преобразованием фигуры A . Подобное преобразование фигур является одним из весьма важных видов геометрических преобразований, имеющих огромное применение на практике. Показываемая в кино картина на экране подобна изображению, сделанному на пленке; технические чертежи планов и фасадов зданий, планов местности, планов городов и т. п. получают в результате подобного преобразования.

178. Подобие окружностей. Докажем, что фигура, подобная окружности, есть также окружность.

Теорема. *Геометрическое место точек, делящих в данном отношении отрезки лучей, соединяющих какую-нибудь точку с точками окружности, есть окружность.*

Пусть дана окружность радиуса R с центром в точке O (рис. 185). Возьмем произвольную точку S и, соединив ее с точкой O , разделим отрезок SO точкой O_1 в некотором отношении так, что $\frac{SO_1}{SO} = k$.

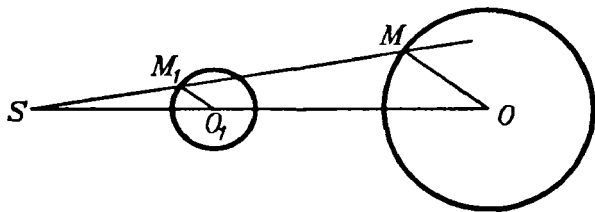


Рис. 185.

Возьмем произвольную точку M на данной окружности и соединим ее с точкой S . На отрезке SM найдем точку M_1 такую, что $\frac{SM_1}{SM} = \frac{SO_1}{SO} = k$. Для этой цели следует из точки O_1 провести прямую, параллельную OM , до пересечения с прямой SM . Из подобия треугольников SOM и SO_1M_1 следует $\frac{O_1M_1}{OM} = \frac{SO_1}{SO}$. Следовательно, $\frac{O_1M_1}{OM} = k$. Отсюда найдем длину отрезка O_1M_1 , именно $O_1M_1 = k \cdot OM$, или $O_1M_1 = k \cdot R$.

Мы видим, что величина O_1M_1 есть некоторая постоянная величина, не зависящая от положения точки M на данной окружности. Следовательно, если точка M будет перемещаться по окружности, то точка M_1 будет перемещаться по плоскости, описывая окружность с центром O_1 и радиусом kR .

179. Теорема. *Две окружности на плоскости всегда можно рассматривать как перспективно-подобные фигуры, причем они имеют два центра подобия: один внешний, другой внутренний.* Пусть даны две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2 (рис. 186). Проведем линию центров O_1O_2 и построим на ней две точки J и E , определяемые равенствами:

$$\frac{O_1J}{O_2J} = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{и} \quad \frac{O_1E}{O_2E} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Легко заметить, что точки J и E обладают свойствами центров подобия. Возьмем какую-либо точку M_1 на первой окружности, проведем прямую JM_1 и отложим на ней отрезок JM_2 так, что $JM_1 : JM_2 = R_1 : R_2$; $\triangle JO_1M_1 \sim \triangle JO_2M_2$, так как $\angle O_1JM_1 = \angle O_2JM_2$, $\frac{JM_1}{JM_2} = \frac{R_1}{R_2}$ и $\frac{O_1J}{O_2J} = \frac{R_1}{R_2}$;

следовательно,

$$\frac{O_1M_1}{O_2M_2} = \frac{R_1}{R_2}, \text{ и так как } O_1M_1 = R_1, \text{ то } O_2M_2 = R_2.$$

Это значит, что точка M_2 лежит на второй окружности. Следовательно, точка J есть внутренний центр подобия данных окружностей. Таким же образом можно доказать, что E есть внешний центр подобия.

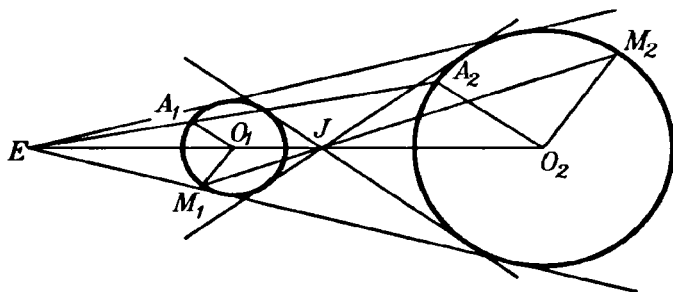


Рис. 186.

Построение точек J и E можно выполнить так: проводим в данных окружностях два каких-либо параллельных радиуса и соединяем их концы, полученная прямая пересечет линию центров в центре подобия. При этом, если проведенные радиусы направлены в одну сторону (рис. 186, O_1A_1 и O_2A_2), то центр подобия будет внешним; если они направлены в противоположные стороны (рис. 186, O_1M_1 и O_2M_2), то центр подобия будет внутренний. Легко, далее, заметить, что если две окружности касаются, то один из центров подобия совпадает с точкой касания. При этом, если касание окружностей внешнее, то в точке касания находится внутренний центр подобия, если же касание внутреннее, то с точкой касания совпадает внешний центр подобия окружностей.

Упражнение 1. Доказать, что если две окружности лежат одна вне другой, то их внешний центр подобия совпадает с точкой пересечения их общих внешних касательных, а внутренний — с точкой пересечения общих внутренних касательных.

2. Какое положение должны иметь две окружности на плоскости, чтобы их внешний центр подобия совпал с внутренним?

О т в е т. Окружности концентричны.

180. Пантограф. Подобное преобразование фигур можно выполнять механически с помощью особого прибора, изобретенного в 1603 г. Христофором Шейнером и названного им пантографом.

Вообразим параллелограмм $ABCD$ (рис. 187), стороны которого служат металлическими стержнями, могущие на шарнирах вращаться вокруг вершин. Укрепим неподвижно вершину A , возьмем на продолжении BC произ-

вольную точку E и заставим эту точку описать какую-либо линию EE' . Пусть F — точка пересечения прямых AE и CD и $AB'C'D'$ — новое положение нашего шарнирного параллелограмма. Так как длина сторон параллелограмма и длина отрезков CE и CF при перемещении точки E не изменялись, то можем написать последовательно следующие пропорции:

$$\frac{AD}{CE} = \frac{DF}{FC} = \frac{AF}{FE} \quad (\text{так как } \triangle ADF \sim \triangle ECF); \quad \frac{AD'}{C'E'} = \frac{D'F'}{F'C'};$$

отсюда следует, что $\triangle AD'F' \sim \triangle E'C'F'$; следовательно $\angle AD'F' = \angle E'C'F'$, т. е. точки A , F' и E' лежат на одной прямой. Далее, из подобия тех же треугольников имеем, что $\frac{AF'}{F'E'} = \frac{D'F'}{F'C'}$, но

$$\frac{D'F'}{F'C'} = \frac{DF}{FC} = \frac{AF}{FE};$$

следовательно, $\frac{AF'}{F'E'} = \frac{AF}{FE}$.

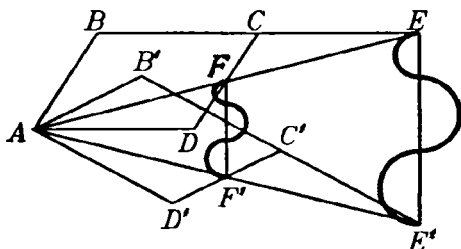


Рис. 187.

Отсюда следует, что треугольники AEE' и AFF' подобны, следовательно, $\angle AFF' = \angle AEE'$, и $EE' \parallel FF'$.

Далее из чертежа находим:

$$\frac{AF}{FE} = \frac{BC}{CE} \quad \text{и} \quad \frac{AF'}{F'E'} = \frac{B'C'}{C'E'}.$$

Составляя производные пропорции, можем написать:

$$\frac{AF + FE}{AF} = \frac{BC + CE}{BC} \quad \text{и} \quad \frac{AF' + F'E'}{AF'} = \frac{B'C' + C'E'}{B'C'}$$

или

$$\frac{AE}{AF} = \frac{BE}{BC} \quad \text{и} \quad \frac{AE'}{AF'} = \frac{B'E'}{B'C'};$$

но $BE = B'E'$ и $BC = B'C'$; следовательно,

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AE'}{AF'} = \frac{BE}{BC}.$$

Это равенство показывает, что когда точка E опишет какую-либо фигуру, точка F опишет подобную фигуру, причем коэффициент подобия этих фигур равен отношению $\frac{BE}{BC}$. Если в точке E укрепить острие иглы, а в F — острие карандаша, то при обводе острием иглы контура фигуры острие карандаша зарисует на бумаге контур фигуры подобной. Для изменения показателя подобия следует переместить точку E по прямой BC в ту или другую сторону. На этом свойстве шарнирного параллелограмма и основано устройство пантиграфа, общий вид которого представлен на рисунке 188. Прибор применяется при перерисовке планов в различных масштабах.

Для подобного преобразования фигур небольшого размера и несложной формы можно пользоваться также делительным циркулем (§ 166). Для этого следует установить подвижной винт циркуля так, чтобы он делил всю длину ножки в отношении, равном заданному коэффициенту подобия, затем выбрать центр подобия и соединить его лучами с основными точками фигуры. На ка-

ждем луче следует измерить одним раствором циркуля от центра подобия до точки фигуры и, перевернув циркуль, отложить на том же луче от

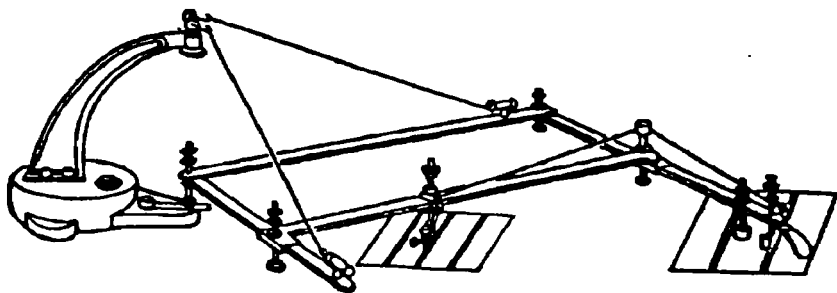


Рис. 188.

центра подобия отрезок, полученный в другом растворе. Таким способом можно перенести все основные точки данной фигуры и получить ее очертание в нужном размере.

Задачи на построение

181. Метод подобия. Подобное преобразование фигур можно с успехом применить к решению многих задач на построение. На этом основан так называемый метод подобия.

Метод подобия состоит в том, что, пользуясь некоторыми данными задачи, строят сначала фигуру, подобную искомой, а затем переходят к искомой. Этот метод особенно удобен тогда, когда только одна данная величина есть длина, а все прочие величины — или углы, или отношения линий; таковы, например, задачи: построить треугольник по данному углу, стороне и отношению двух других сторон или по двум углам и длине некоторого отрезка (высоте, медиане, биссектрисе и т. п.); построить квадрат по данной сумме или разности диагонали и стороны и т. п.

Решим, например, такую задачу:

Задача 1. Построить треугольник, когда даны один из его углов C , отношение сторон $AC:BC$, заключающих этот угол, и высота h , опущенная из вершины этого угла на противоположную сторону (рис. 189).

Пусть $AC:BC = m:n$, где m и n — два данных отрезка или два данных числа. Строим угол C , на его сторонах откладываем отрезки CA_1 и CB_1 , пропорциональные m и n . Если m и

l — отрезки, то берем прямо $CA_1=t$ и $CB_1=n$. Если t и n числа, то, выбрав произвольный отрезок l , строим отрезки $CA_1=tl$ и $CB_1=nl$.

В обоих случаях имеем $CA_1:CB_1 = t:n$.

Треугольник CA_1B_1 , очевидно, подобен искомому треугольнику.

Чтобы получить искомый треугольник, построим в треугольнике CA_1B_1 высоту CD_1 , обозначив ее через h_1 . Выбираем теперь произвольный центр подобия и строим треугольник, подобный треугольнику CA_1B_1 с коэффициентом подобия, равным отношению $\frac{h}{h_1}$, где h — высота искомого треугольника. Полученный таким путем треугольник и будет искомым.

Удобнее всего выбрать центр подобия прямо в точке C . В таком случае построение искомого треугольника становится особенно простым (рис. 189). Продолжаем высоту CD_1 треугольника A_1B_1C , откладывая на ней отрезок CD , равный h , и проводим прямую AB , параллельную A_1B_1 .

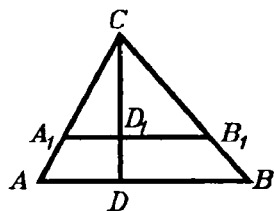


Рис. 189.

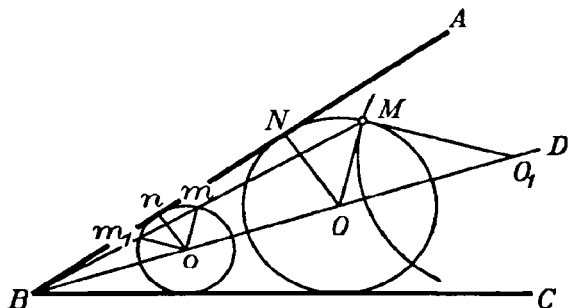


Рис. 190.

Треугольник ABC — искомый.

В задачах этого рода положение искомой фигуры остается произвольным; но во многих вопросах требуется построить фигуру, положение которой относительно данных точек или линий вполне определено. При этом может случиться, что, отрешившись от какого-нибудь одного из условий положения и оставив все остальные, мы получим бесчисленное множество фигур, подобных искомой. В таком случае метод подобия может быть употреблен с пользой. Приведем примеры.

Задача 2. В данный угол ABC вписать окружность, которая проходила бы через данную точку M (рис. 190).

Отбросим на время требование, чтобы окружность проходила через точку M . Тогда данному условию удовлетворяет бесчисленное множество окружностей, центры которых лежат на биссектрисе BD . Построим одну из таких окружностей, например ту, центр которой есть o . Возьмем на ней точку m , сходственную точке M , т. е. лежащую на луче MB , и проведем радиус mo . Если теперь построим $MO \parallel mo$, то точка O будет центром искомого круга. Действительно, проведя к стороне AB перпендикуляры ON и on , мы получим подобные треугольники MBO и mBo , NBO и nBo , из которых будем иметь:

$$MO:mo=BO:Bo; NO:no=BO:Bo,$$

откуда

$$MO:mo=NO:no.$$

Но $mo=no$; следовательно, $MO=NO$, т. е. окружность, описанная радиусом OM , с центром O , касается стороны AB ; а так как ее центр лежит на биссектрисе угла, то она касается и стороны BC .

Если за сходственную точку возьмем другую точку m_1 пересечения луча MB с окружностью o , то найдем другой центр O_1 искомого круга. Следовательно, задача допускает два решения.

Задача 3. В данный треугольник ABC вписать ромб с данным острым углом так, чтобы одна из его сторон лежала на основании AB треугольника ABC , а две его вершины — на боковых сторонах AC и BC (рис. 191).

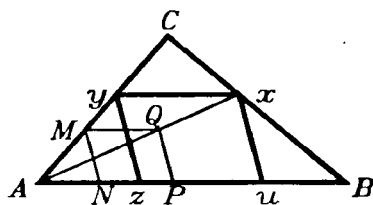


Рис. 191.

Отбросим на время требование, чтобы одна из вершин ромба лежала на стороне BC . Тогда можно построить бесчисленное множество ромбов, удовлетворяющих остальным условиям задачи. Построим один из них.

Берем на стороне AC произвольную точку M . Строим угол с вершиной в этой точке, равный данному, одна сторона которого была бы параллельна основанию AB , а другая пересекала основание AB в некоторой точке N . На стороне AB от точки N откладываем отрезок NP , равный MN , и строим ромб со сторонами MN и NP .

Пусть Q его четвертая вершина. Далее, выбираем вершину A за центр подобия и строим ромб, подобный ромбу $MNPQ$, выбирая коэффициент подобия так, чтобы вершина нового ромба, соответствующая вершине Q , оказалась на стороне BC . Для этой цели продолжаем прямую AQ до пересечения со стороной BC в некоторой точке x . Эта точка x будет одной из вершин искомого ромба.

Проводя из этой точки прямые, параллельные сторонам ромба $MNPQ$, получаем искомый ромб $xuzv$.

Предоставляем самим учащимся решить методом подобия следующие задачи:

1. Построить треугольник, зная два его угла и радиус описанной окружности.

2. Построить треугольник, зная отношение высоты к основанию, угол при вершине и медиану боковой стороны.

3. Дан $\angle AOB$ и внутри него точка C . Найти на стороне OB точку M , равно отстоящую от OA и от точки C .

V. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКАХ

182. Теорема. Стороны угла (ABC) , пересекаемые рядом параллельных прямых $(DD_1, EE_1, FF_1\dots)$, рассекаются ими на пропорциональные части (рис. 192).

Требуется доказать, что

$$\frac{BD}{BD_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EF}{E_1F_1} \text{ и т. д.,}$$

или

$$BD:DE = BD_1:D_1E_1;$$

$$DE:EF = D_1E_1:E_1F_1 \text{ и т. д.}$$

Проводя вспомогательные прямые DM, EN и т. д., параллельные BA , мы получим треугольники BDD_1, DEM, EFN и т. д., которые все подобны между собой, так как углы у них соответственно равны (вследствие параллельности прямых). Из их подобия следует:

$$\frac{BD}{BD_1} = \frac{DE}{DM} = \frac{EF}{EN} \text{ и т. д.}$$

Заменив в этом ряду равных отношений отрезок DM на D_1E_1 , отрезок EN на E_1F_1 и т. д. (противоположные стороны

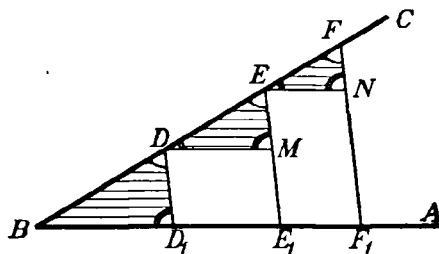


Рис. 192.

параллелограммов равны), мы получим то, что требовалось доказать.

183. Теорема. *Две параллельные прямые (MN , M_1N_1 , (рис. 193), пересекаемые рядом прямых (OA , OB , OC ,...), исходящих из одной и той же точки (O), рассекаются ими на пропорциональные части.*

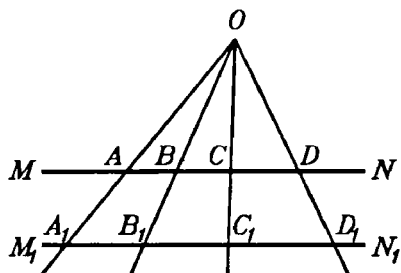


Рис. 193.

Требуется доказать, что отрезки AB , BC , CD ,... прямой MN пропорциональны отрезкам A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 ,... прямой M_1N_1 .

Из подобия треугольников OAB и OA_1B_1 (§ 159) и треугольников OBC и OB_1C_1 выводим:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BO}{B_1O} \text{ и } \frac{BO}{B_1O} = \frac{BC}{B_1C_1},$$

откуда

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Подобным же образом доказывается пропорциональность и прочих отрезков.

184. Задача. *Разделить отрезок прямой AB (рис. 194) на три части в отношении $m:n:p$, где m , n и p — данные отрезки или данные числа.*

Проведя луч AC под произвольным углом к AB , отложим на нем от точки A отрезки, равные отрезкам m , n и p . Точку F — конец отрезка p , соединим с B прямой BF и через концы G и H

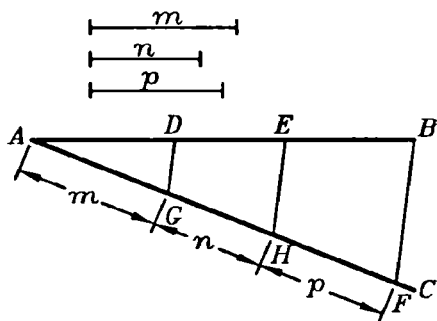


Рис. 194.

отложенных отрезков проводим прямые GD и HE , параллельные BF . Тогда отрезок AB разделится в точках D и E на части в отношении $m:n:p$.

Если m , n и p означают какие-нибудь числа, например 2, 5, 3, то построение выполняется так же; с той лишь разницей, что на AC откладываются отрезки, равные 2, 5 и 3 произвольным единицам длины.

Конечно, указанное построение применимо к делению отрезка не только на три части, но на какое угодно иное число частей.

185. Задача. К трем данным отрезкам a , b и c найти четвертый пропорциональный (рис. 195), т. е. найти такой отрезок x , который удовлетворял бы пропорции:

$$a:b=c:x.$$

На сторонах произвольного угла ABC откладываем отрезки: $BD=a$, $BF=b$, $DE=c$. Проведем затем через D и F прямую, построим $EG \parallel DF$. Отрезок FG будет искомым.

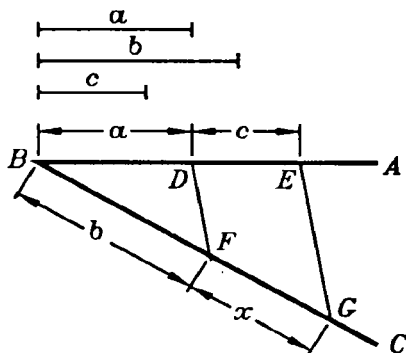


Рис. 195.

Свойство биссектрисы угла треугольника

186. Теорема. Биссектриса (BD , рис. 196) любого угла треугольника (ABC) делит противоположную сторону на части (AD и DC), пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

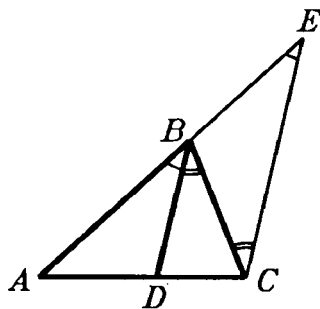


Рис. 196.

Требуется доказать, что если $\angle ABD = \angle DBC$, то $AD:DC = AB:BC$.

Проведем $CE \parallel BD$ до пересечения в точке E с продолжением стороны AB . Тогда, согласно теореме § 182, мы будем иметь пропорцию:

$$AD:DC = AB:BE.$$

Чтобы от этой пропорции перейти к той, которую требуется доказать, достаточно обнаружить, что $BE = BC$, т. е. что $\triangle BCE$ равнобедренный. В треугольнике этом $\angle E = \angle ABD$ (как углы, соответственные при параллельных прямых) и $\angle BCE = \angle DBC$ (как углы, накрест лежащие при тех же параллельных прямых).

Но $\angle ABD = \angle DBC$ по условию; значит, $\angle E = \angle BCE$, а потому равны и стороны BC и BE , лежащие против равных углов.

Теперь, заменив в написанной выше пропорции BE на BC , получим ту пропорцию, которую требуется доказать.

Численный пример. Пусть $AB=10$; $BC=7$ и $AC=6$. Тогда, обозначив AD буквой x , можем написать пропорцию:

$$x:(6-x)=10:7,$$

откуда найдем:

$$7x=60-10x; \quad 7x+10x=60; \quad 17x=60;$$

$$x = \frac{60}{17} = 3\frac{9}{17}.$$

Следовательно,

$$DC=6-x=6-3\frac{9}{17}=2\frac{8}{17}.$$

187. Теорема (выражающая свойство биссектрисы внешнего угла треугольника). *Биссектриса (BD , рис. 197) внешнего угла (CBF) треугольника (ABC) пересекает продолжение противоположной стороны (AC) в такой точке (D), расстояния которой (DA и DC) до концов этой стороны пропорциональны прилежащим сторонам треугольника (AB и BC). Требуется доказать, что если $\angle CBD=\angle FBD$, то $DA : DC = AB : BC$.*

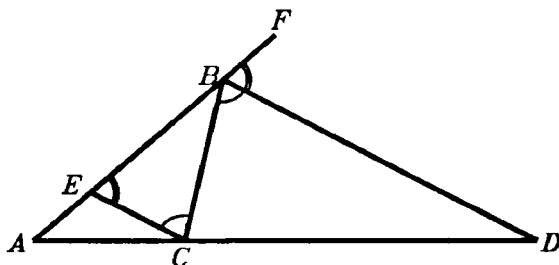


Рис. 197.

Проведя $CE \parallel BD$, получим пропорцию:

$$DA : BC = AB : BE.$$

Так как $\angle BEC = \angle FBD$ (как соответственные), а $\angle BCE = \angle CBD$ (как накрест лежащие при параллельных прямых) и углы FBD и CBD равны по условию, то $\angle BEC = \angle BCE$; значит, $\triangle BCE$ равнобедренный, т. е. $BE=BC$. Подставив в пропорцию вместо BE равный отрезок BC , получим ту пропорцию, которую требовалось доказать:

$$DA : DC = AB : BC.$$

Примечание. Особый случай представляет биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, которая параллельна основанию.

VI. МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА И НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ФИГУР

188. Теорема. *В прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная величина между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит гипотенузу, а каждый катет есть средняя пропорциональная между гипотенузой и прилежащим к этому катету отрезком гипотенузы.*

Пусть AD (рис. 198) есть перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла A на гипотенузу BC . Требуется доказать следующие три пропорции:

$$1) \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}; \quad 2) \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}; \quad 3) \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}.$$

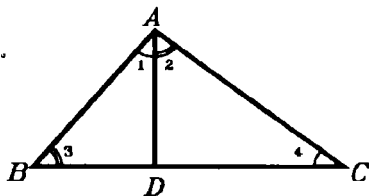


Рис. 198.

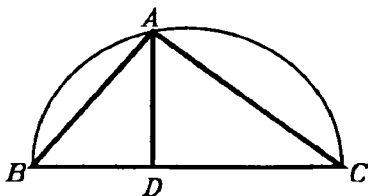


Рис. 199.

Первую пропорцию мы докажем из подобия треугольников ABD и ADC . Эти треугольники подобны, потому что

$$\angle 1 = \angle 4 \text{ и } \angle 2 = \angle 3,$$

вследствие перпендикулярности их сторон. Возьмем в $\triangle ABD$ те стороны BD и AD , которые составляют первое отношение доказываемой пропорции; сходственными сторонами в $\triangle ADC$ будут AD и DC ¹, поэтому

¹ Чтобы безошибочно определить, какие стороны взятых треугольников сходственны между собой, полезно держаться такого пути:

1) указать углы, против которых лежат взятые стороны одного треугольника;

2) найти равные им углы в другом треугольнике;

3) взять противолежащие им стороны.

Например, для треугольников ABD и ADC рассуждаем так: в треугольнике ABD стороны BD и AD лежат против углов 1 и 3; в треугольнике ADC

$$BD : AD = AD : DC.$$

Вторую пропорцию докажем из подобия треугольников ABC и ABD . Эти треугольники подобны, потому что они прямоугольные и острый угол B у них общий. В $\triangle ABC$ возьмем те стороны BC и AB , которые составляют первое отношение доказываемой пропорции; сходственными сторонами в $\triangle ABD$ будут AB и BD ; поэтому

$$BC : AB = AB : BD.$$

Третью пропорцию докажем из подобия треугольников ABC и ADC . Эти треугольники подобны, потому что они оба прямоугольные и имеют общий острый угол C . В $\triangle ABC$ возьмем стороны BC и AC ; сходственными сторонами в $\triangle ADC$ будут AC и DC ; поэтому

$$BC : AC = AC : DC.$$

189. Следствие. Пусть A (рис. 199) есть произвольная точка окружности, описанной на диаметре BC . Соединив концы диаметра с этой точкой, мы получим прямоугольный $\triangle ABC$, у которого гипотенуза есть диаметр, а катеты суть хорды. Применяя доказанную выше теорему к этому треугольнику, приходим к следующему заключению:

Перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки окружности на диаметр, есть средняя пропорциональная величина между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит диаметр, а хорда, соединяющая эти точки с концом диаметра, есть средняя пропорциональная между диаметром и прилежащим к хорде отрезком диаметра.

190. Задача. Построить отрезок, средний пропорциональный между двумя отрезками a и b .

Задачу эту можно решить двояким путем:

1) На произвольной прямой (рис. 200) откладываем отрезки $AB=a$ и $BC=b$; на AC , как на диаметре, описываем полуокружность; из B восстанавливаем до пересечения с окружностью перпендикуляр BD . Этот перпендикуляр и есть искомая средняя пропорциональная между AB и BC .

2) На произвольной прямой (рис. 201) откладываем от точки A отрезки a и b . На большем из этих отрезков описываем полуокружность. Проведя из конца меньшего отрезка перпендикуляр AB до пересечения его с окружностью в точке

этим углам равны углы 1 и 2; против них лежат стороны AD и DC . Значит, стороны AD и DC сходственны со сторонами BD и AD .

D , соединяем A с D . Хорда AD есть средняя пропорциональная между a и b .

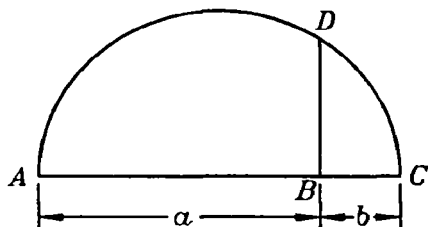


Рис. 200.

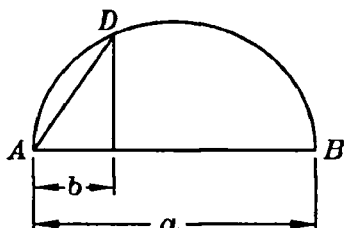


Рис. 201.

191. Теорема Пифагора. Доказанные выше теоремы позволяют обнаружить замечательное соотношение между сторонами любого прямоугольного треугольника. Это соотношение было впервые замечено греческим геометром Пифагором (VI в. до н. э.) и носит поэтому его имя — теорема Пифагора.

Если стороны прямоугольного треугольника измерены одной и той же единицей, то квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

Пусть ABC (рис. 202) есть прямоугольный треугольник, AD — перпендикуляр, опущенный на гипотенузу из вершины прямого угла. Положим, что стороны и отрезки гипотенузы измерены одной и той же единицей, причем получились числа a, b, c, c' и b' (принято длины сторон треугольника обозначать малыми буквами, соответствующими большим буквам, которыми обозначены противолежащие углы). Применяя теорему § 188, можем написать пропорции:

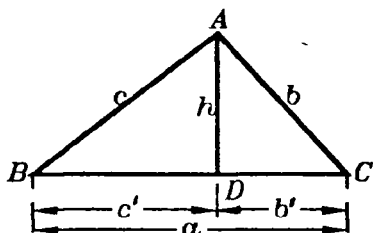


Рис. 202.

$$a:c=c:c' \text{ и } a:b=b:b',$$

откуда

$$ac'=c^2 \text{ и } ab'=b^2.$$

Сложив почленно эти два равенства, найдем:

$$ac'+ab'=c^2+b^2, \text{ или } a(c'+b')=c^2+b^2.$$

Но $c'+b'=a$, следовательно, $a^2=c^2+b^2$.

Эту теорему обыкновенно выражают сокращенно так: **квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.**

Пример. Положим, что катеты, измеренные какой-нибудь линейной единицей, выражаются числами 3 и 4; тогда гипотенуза в той же единице выразится числом x , удовлетворяющим уравнению:

$$x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25, \text{ откуда } x = \sqrt{25} = 5.$$

Замечание. Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 называется часто египетским треугольником, так как он был известен еще древним египтянам. Так, их землемеры для построения прямого угла на земной поверхности пользовались таким приемом: бечевку посредством узлов они разделяли на 12 равных частей; затем, связав концы, натягивали ее на земле (посредством кольев) в виде треугольника со сторонами в 3, 4 и 5 делений, тогда угол между сторонами, равными 3 и 4, оказался прямым¹.

Теорема Пифагора имеет еще другую формулировку, именно ту, которая была для нее получена самим Пифагором. С этой формулировкой мы познакомимся позднее (§ 257).

192. Следствие. *Квадраты катетов относятся между собой, как прилежащие отрезки гипотенузы.* Действительно, из уравнений предыдущего параграфа находим:

$$c^2 : b^2 = ac' : ab' = c' : b'.$$

193. Замечание 1. К трем равенствам, которые мы вывели выше:

$$1) ac' = c^2; 2) ab' = b^2 \text{ и } 3) a^2 = b^2 + c^2,$$

можно присоединить еще следующие два:

$$4) b' + c' = a \text{ и } 5) h^2 = b'c'$$

(если буквой h обозначим длину высоты AD). Из этих равенств третье, как мы видели, составляет следствие первых двух и четвертого, так что из пяти равенств только четыре независимы; вследствие этого можно по данным двум из шести чисел находить остальные четыре.

Для примера положим, что нам даны отрезки гипотенузы $b' = 5$ м и $c' = 7$ м; тогда

$$a = b' + c' = 12; c = \sqrt{ac'} = \sqrt{12 \cdot 7} = \sqrt{84} = 9,165...$$

¹ Прямоугольные треугольники, у которых стороны измеряются целыми числами, носят название пифагоровых треугольников. Можно доказать, что катеты x и y и гипотенуза z таких треугольников выражаются следующими формулами: $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$, $z = a^2 + b^2$, где a и b — произвольные целые числа при условии, что $a > b$.

$$b = \sqrt{ab'} = \sqrt{12 \cdot 5} = \sqrt{60} = 7,746...$$

$$h = \sqrt{b'c'} = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{35} = 5,916... .$$

Замечание 2. В последующих теоремах мы будем сокращенно говорить: «квадрат стороны» вместо «квадрат числа, выражающего длину стороны», или «произведение отрезков» вместо «произведение чисел, выражающих длины отрезков». При этом будем подразумевать, что отрезки измерены одной и той же единицей.

194. Теорема. *Во всяком треугольнике квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения какой-нибудь из этих сторон на отрезок ее от вершины острого угла до высоты.*

Пусть BC — сторона $\triangle ABC$ (рис. 203 и 204), лежащая против острого угла A , и BD — высота, опущенная на какую-

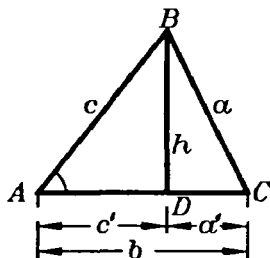


Рис. 203.

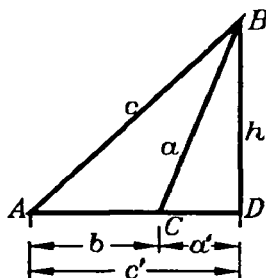


Рис. 204.

либо из остальных сторон, например на AC (или на продолжение AC). Требуется доказать, что

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD,$$

или, обозначая длины линий малыми буквами, как указано на рисунке, надо доказать равенство:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'.$$

Из прямоугольного $\triangle BDC$ находим:

$$a^2 = h^2 + (a')^2. \quad (1)$$

Определим каждый из квадратов h^2 и $(a')^2$. Из прямоугольного $\triangle BAD$ находим:

$$h^2 = c^2 - (c')^2. \quad (2)$$

С другой стороны, $a' = b - c'$ (рис. 203) или $a' = c' - b$ (рис. 204). В обоих случаях для $(a')^2$ получаем одно и то же выражение:

$$\begin{aligned}(a')^2 &= (b - c')^2 = b^2 - 2bc' + (c')^2; \\ (a')^2 &= (c' - b)^2 = (c')^2 - 2bc' + b^2.\end{aligned}\quad (3)$$

Теперь равенство (1) можно переписать так:

$$a^2 = c^2 - (c')^2 + b^2 - 2bc' + (c')^2 = c^2 + b^2 - 2bc'.$$

195. Теорема. В тупоугольном треугольнике квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, сложенной с удвоенным произведением какой-нибудь из этих сторон на отрезок ее продолжения от вершины тупого угла до высоты.

Пусть AB — сторона $\triangle ABC$ (рис. 205), лежащая против тупого угла C , и BD — высота, опущенная на продолжение

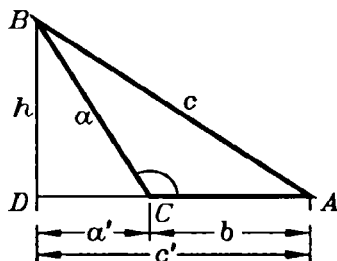


Рис. 205.

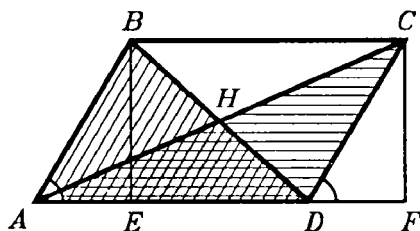


Рис. 206.

какой-либо из остальных сторон, например на AC ; требуется доказать, что

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot CD,$$

или, применяя сокращенные обозначения, согласно указанию на рисунке:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ba'.$$

Из треугольников ABD и CBD находим:

$$\begin{aligned}c^2 &= h^2 + (c')^2 = a^2 - (a')^2 + (a' + b')^2 = \\ &= a^2 - (a')^2 + (a')^2 + 2ba' + b^2 = a^2 + b^2 + 2ba',\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

196. Следствие. Из трех последних теорем выводим, что квадрат стороны треугольника равен, меньше или больше суммы квадратов двух других сторон, смотря по тому, будет ли противолежащий угол прямой, острый или тупой; отсюда следует обратное предложение.

Угол треугольника окажется прямым, острым или тупым, смотря по тому, будет ли квадрат противолежащей этому углу стороны равен, меньше или больше суммы квадратов двух других сторон.

197. Теорема. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов сторон (рис. 206).

Из вершин B и C параллелограмма $ABCD$ опустим на основание AD перпендикуляры BE и CF . Тогда из треугольников ABD и ACD находим:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE,$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot DF.$$

Прямоугольные треугольники ABE и DCF равны, так как они имеют по равной гипотенузе и равному острому углу; поэтому $AE = DF$. Заметив это, сложим почленно два выведенные выше равенства; тогда $AD \cdot AE$ и $2AD \cdot DF$ взаимно уничтожатся, и мы получим:

$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2 + AD^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

198. Вычисление высот треугольника по его сторонам. Определим высоту h_a треугольника ABC , опущенную на сторону $BC = a$ (рис. 207 и 208).

Обозначим отрезки стороны a (продолженной в случае тупого угла C , рис. 208) таким образом: отрезок BD , приле-

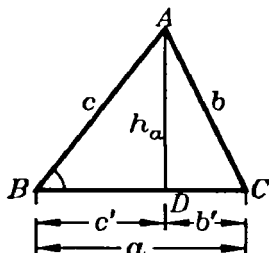


Рис. 207.

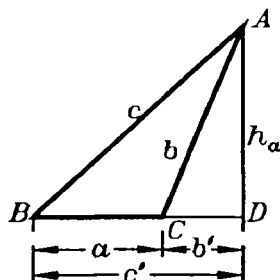


Рис. 208.

жащий к стороне c , через c' , а отрезок DC , прилежащий к стороне b , через b' . Пользуясь теоремой о квадрате стороны треугольника, лежащей против острого угла (§194), можем написать:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac'.$$

Из этого уравнения находим отрезок c' :

$$c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

После этого из треугольника ABD определяем высоту, как катет:

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2}.$$

Таким же путем можно определить в зависимости от сторон треугольника длины h_b и h_c высот, опущенных на стороны b и c .

VII. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЛИНИИ В КРУГЕ

199. Некоторые пропорциональные линии в круге мы указали ранее (§ 189); теперь укажем еще другие.

Теорема. Если через точку (M , рис. 209), взятую внутри круга, проведена какая-нибудь хорда (AB) и диаметр (CD), то произведение отрезков хорды ($AM \cdot MB$) равно произведению отрезков диаметра ($MD \cdot MC$).

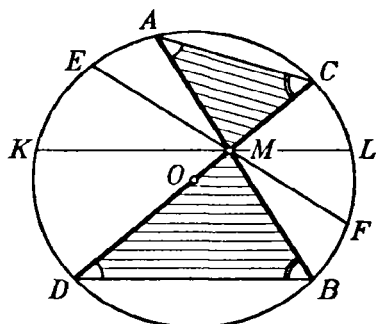


Рис. 209.

Проведя две вспомогательные хорды AC и BD , мы получим два треугольника AMC и MBD (покрытые на рисунке штрихами), которые подобны, так как у них углы A и D равны, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу BC , углы C и B равны, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AD . Из подобия треугольников выводим:

$$AM : MD = MC : MB,$$

откуда

$$AM \cdot MB = MD \cdot MC.$$

200. Следствие. Если через точку (M , рис. 209), взятую внутри круга, проведено сколько угодно хорд (AB , EF , KL , ...), то произведение отрезков каждой хорды есть число постоянное для всех хорд, так как для каждой хорды это произведение равно произведению отрезков диаметра CD , проходящего через взятую точку M .

201. Теорема. Если из точки (M , рис. 210), взятой вне круга, проведены к нему какая-нибудь секущая (MA) и касательная (MC), то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной (предполагается).

что секущая ограничена второй точкой пересечения, а касательная — точкой касания).

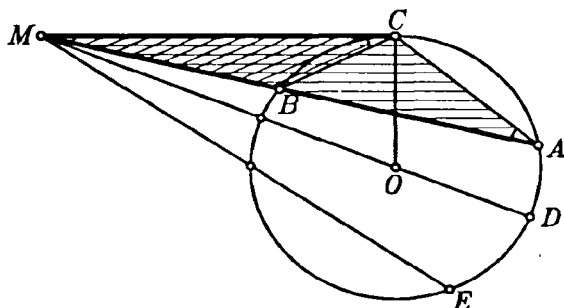


Рис. 210.

Проведем вспомогательные хорды AC и BC ; тогда получим два треугольника MAC и MBC (покрытые на рисунке штрихами), которые подобны, потому что у них угол M общий и углы MCB и CAB равны, так как каждый из них измеряется половиной дуги BC . Возьмем в $\triangle MAC$ стороны MA и MC ; сходственными сторонами $\triangle MBC$ будут MC и MB ; поэтому

$$MA : MC = MC : MB,$$

откуда

$$MA \cdot MB = MC^2.$$

202. Следствие. Если из точки (M , рис. 210), взятой вне круга, проведено к нему сколько угодно секущих (MA , MD , ME ,...), то произведение каждой секущей на ее внешнюю часть есть число постоянное для всех секущих, так как для каждой секущей это произведение равно квадрату касательной (MC^2), проведенной из точки M .

VIII. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА

203. Определение. Пусть α будет какой-нибудь острый угол (рис. 211). Возьмем на одной из его сторон произвольную точку M и опустим из нее перпендикуляр MN на другую сторону угла. Тогда мы получим прямоугольный треугольник BMN . Возьмем отношения сторон этого треугольника попарно, а именно:

$\frac{MN}{BM}$, т. е. отношение катета, противолежащего углу α , к гипотенузе,

$\frac{BN}{BM}$, т. е. отношение катета, прилежащего к углу α , к гипотенузе,

$\frac{MN}{BN}$, т. е. отношение катета, противолежащего углу α , к катету прилежащему; и им обратные отношения:

$$\frac{BM}{MN}, \frac{BM}{BN}, \frac{BN}{MN}.$$

Величина каждого из этих 6 отношений не зависит от положения точки M на стороне BC . Действительно, если мы

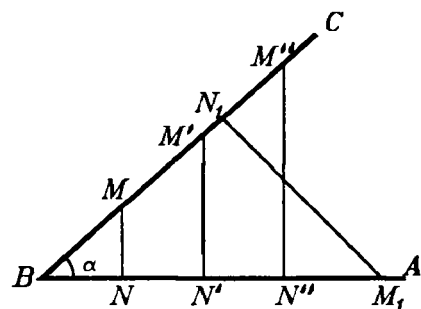


Рис. 211.

вместо точки M возьмем другие точки M' , M'' ,... и опустим перпендикуляры $M'N'$, $M''N''$, то образовавшиеся треугольники $BM'N'$, $BM''N''$,... будут подобны треугольнику BMN , так как соответственные углы их одинаковы. Так как в подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны, то

$$\frac{MN}{BN} = \frac{M'N'}{BN'} = \frac{M''N''}{BN''} = \dots,$$

$$\frac{BN}{MN} = \frac{BN'}{M'N'} = \frac{BN''}{M''N''} = \dots.$$

Величина каждого из взятых нами отношений не зависит также и от того, на какой стороне угла берется точка M . Если, например, мы возьмем точку M_1 (тот же рисунок) на стороне BA и проведем $M_1N_1 \perp BC$, то треугольник BM_1N_1 также будет подобен $\triangle BMN$, так как у них имеются по 2 равных угла, именно по прямому углу и по острому α , который входит и в тот, и в другой треугольник; поэтому:

$$\frac{M_1N_1}{BM_1} = \frac{MN}{BM} = \dots.$$

Таким образом, взятые нами отношения не меняются при изменении положения точки M на той или другой стороне угла α , но, конечно, они изменяются при изменении величины самого угла.

При этом каждому размеру угла соответствует вполне определенное значение каждого из этих отношений.

Поэтому мы можем сказать, что каждое отношение есть функция только угла и характеризует собой величину этого угла.

Все указанные отношения принято называть **тригонометрическими функциями угла**. Чаще других из 6 отношений берутся следующие 4, которым дали особые названия и особые обозначения:

отношение катета, противолежащего углу α , к гипотенузе называется **синусом** угла α и обозначается $\sin \alpha$;

отношение катета, прилежащего к углу α , к гипотенузе называется **косинусом** угла α и обозначается $\cos \alpha$;

отношение катета, противолежащего углу α , к катету, прилежащему к нему, называется **тангенсом** угла α и обозначается $\operatorname{tg} \alpha$;

отношение прилежащего катета к противолежащему (т. е. отношение, обратное тому, которое называется тангенсом) называется **котангенсом** угла α и обозначается $\operatorname{ctg} \alpha$.

Так как каждый из двух катетов меньше гипотенузы, то синус и косинус всякого угла есть число, меньшее единицы, и так как один катет может быть и больше, и меньше другого катета, и равен ему, то тангенс и котангенс могут выражаться числами и большими 1, и меньшими 1, и равными 1.

204. Построение угла по заданной величине одной из его тригонометрических функций. 1) Пусть требуется начертить угол, синус которого равняется $\frac{3}{4}$. Для этого надо построить такой прямоугольный треугольник, у которого отношение одного из катетов к гипотенузе равнялось бы $\frac{3}{4}$, и взять в этом треугольнике тот из острых углов, который противолежит этому катету. Чтобы построить такой треугольник, возьмем какой-нибудь небольшой отрезок и отложим отрезок AB (рис. 212), равный 4 таким отрезкам. На AB опишем полуокружность и радиусом, равным $\frac{3}{4}$ гипотенузы, с центром в точке B опишем дугу до пересечения ее в точке C с полуокружностью. Соединив C с A и с B , мы получим прямоугольный треугольник, угол которого A и будет иметь синус $\frac{3}{4}$.

2) Дано уравнение: $\cos x = 0,7$; построить угол x . Эта задача решается так же, как и 1-я: за гипотенузу возьмем отрезок AB (тот же рисунок), равный 10 каким-нибудь одинаковым частям, а за прилежащий катет AC — отрезок в 7 таких

же частей; тогда угол A , прилежащий к этому катету, и будет искомым.

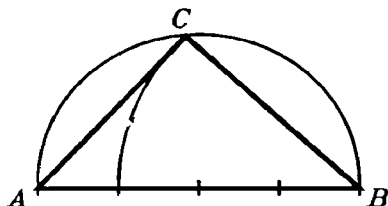


Рис. 212.

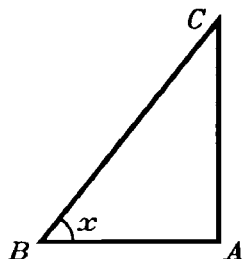


Рис. 213.

3) Построить угол x , зная, что $\operatorname{tg} x = 1\frac{1}{2}$. Для этого надо построить такой прямоугольный треугольник, у которого один катет был бы в $1\frac{1}{2}$ раза больше другого катета. Построив прямой угол (рис. 213), отложим на одной стороне его произвольной длины отрезок AB , а на другой стороне — отрезок AC , равный $1\frac{1}{2}AB$. Соединив точки B и C , получим угол B , тангенс которого равен $1\frac{1}{2}$.

Такое же построение придется выполнить, когда угол требуется построить по данному котангенсу; только тогда за искомым углом надо взять тот, который прилежит к катету AC .

205. Изменение тригонометрических функций при изменении угла от 0° до 90° . Чтобы удобнее проследить изменение синуса и косинуса при изменении величины угла, мы предположим, что при этом изменении длина гипотенузы остается постоянной, равной единице длины, а изменяются только катеты. Опишем радиусом OA (рис. 214), равным произвольной единице длины, четверть окружности AM и в ней возьмем какой-нибудь центральный угол $AOB = \alpha$. Опустив из B на радиус OA перпендикуляр BC , мы будем иметь:

$$\sin \alpha = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{1} = \text{числ. велич. } BC;$$

$$\cos \alpha = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{1} = \text{числ. велич. } OC.$$

Вообразим теперь, что радиус OB вращается вокруг центра O в сторону, указанную на чертеже стрелкой, начиная от OA и кончая OM . Тогда угол α будет увеличиваться от 0° до 90° (переходя через указанные на чертеже значения AOB , AOB' , AOB'' и т. д.); численная величина катета BC , противолежащего углу α , будет увеличиваться от 0 (при $\alpha=0^\circ$) до 1 (при $\alpha=90^\circ$); численная величина катета OC , прилежащего к углу α , будет, наоборот, уменьшаться от 1 (при $\alpha=0^\circ$) до 0 (при $\alpha=90^\circ$). Таким образом, при возрастании угла от 0° до 90° синус его увеличивается от 0 до 1, а косинус уменьшается от 1 до 0.

Проследим теперь изменение тангенса. Так как тангенс есть отношение катета, противолежащего углу, к катету прилежащему, то удобнее будет предположить, что при изменении острого угла прилежащий катет остается неизменным, равным единице длины, а другой катет изменяется. Возьмем отрезок OA , равный единице длины (рис. 215), и примем его за неизменный катет треугольника AOB , острый угол которого $AOB=\alpha$ станем изменять.

Согласно определению, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} =$ числ. велич. AB .

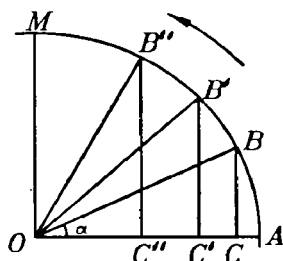


Рис. 214.

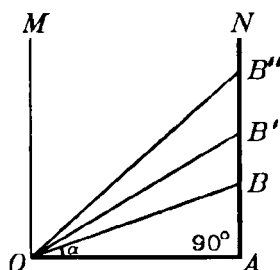


Рис. 215.

Будем теперь перемещать точку B вдоль AN , начиная от A , все выше и выше через положение B' , B'' , ... и т. д.; тогда, как видно из чертежа, угол α и его тангенс будут возрастать, причем, когда подвижная точка B совпадает с A , угол α равен 0° , и тангенс его будет также 0. Когда точка B поднимается по прямой AN все выше и выше, угол α возрастает, стремясь к углу $AOM=90^\circ$, и численная величина тангенса тоже возрастает, причем она, очевидно, может сделаться больше какого угодно большого числа (возрастает неограниченно). Значит, при возрастании угла от 0° до 90° тангенс его увеличивается от 0 неограниченно.

Заметим, что вместо того чтобы говорить о какой-нибудь изменяющейся величине, что она возрастает неограниченно, говорят иначе, что она возрастает до бесконечности, причем слово «бесконечность» выражают письменно знаком ∞ ; так что изменение тангенса можно выразить так: при возрастании угла от 0° до 90° тангенс его возрастает от 0 до ∞ .

Из определения котангенса (§ 203) следует, что котангенс есть величина, обратная тангенсу ($\text{ctg } \alpha = 1:\text{tg } \alpha$), а потому, когда $\text{tg } \alpha$ возрастает от 0 до ∞ , то $\text{ctg } \alpha$ убывает от ∞ до 0.

206. Таблица тригонометрических функций. На странице 345 помещена таблица, в которой выписаны тригонометрические функции (с точностью до 5-го десятичного знака) для всех углов, выражаемых целым числом градусов, от 1° до 90° . Таблица эта расположена так: в первой слева колонке (над которой напечатано «градусы») помещены числа градусов: 1° , 2° , 3° , ... до 45° ; во второй колонке (над которой напечатано «синусы») выставлены величины синусов, соответствующие углам, указанным в первой колонке; в 3-й колонке помещены величины косинусов, затем тангенсов и далее котангенсов. В последней 6-й колонке помещены снова числа градусов, именно: 90° , 89° , 88° , 87° , ... и т. д. до 45° . Сделано это (ради экономии места) на том основании, что, как следует из определения синуса и косинуса (§203), $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$, $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, и т. д.; значит, $\sin 1^\circ = \cos 89^\circ$, $\sin 2^\circ = \cos 88^\circ$ и т. д. Поэтому внизу той колонки, над которой сверху стоит надпись «синусы», напечатано «косинусы»; внизу той колонки (3-й слева), над которой помечено «косинусы», стоит «синусы» и т. п. Таким образом, для углов от 1° до 45° надо читать числа градусов в 1-й колонке слева, а названия тригонометрических функций — над колонками, для углов же от 45° до 89° надо числа градусов брать в последней колонке справа, а названия функций читать внизу колонки. Например, из таблицы находим: $\text{tg } 35^\circ = 0,70021$, $\cos 53^\circ = 0,60182$, $\text{tg } 72^\circ = 3,07768$ и т. п.

При помощи такой таблицы мы можем не только находить тригонометрические функции данного угла, но и, наоборот, по данной функции неизвестного угла можем находить (приблизленно) этот угол. Пусть, например, требуется найти угол x , зная, что $\sin x = 0,61523$. Ищем в колонках синусов число, возможно близкое к 0,61523. Такое число оказывается 0,61566, означающее $\sin 38^\circ$. Так как $0,61523 < 0,61566$, то $x < 38^\circ$. Но, с другой стороны, $0,61523 > 0,60182$ (последнее

число в таблице стоит над числом 0,61566 и означает $\sin 37^\circ$; поэтому $x > 37^\circ$. Мы нашли, таким образом, два угла: 37° и 38° , между которыми заключается угол x . Значит, если мы вместо x примем угол в 37° или угол в 38° , то в первом случае найдем приближенное значение с недостатком, а во втором случае — с избытком, в том и другом случае с точностью до 1° . Предпочтительно брать тот из этих двух углов, синус которого менее разнится от данного (в нашем примере лучше взять 38°).

Пусть еще требуется найти угол x по уравнению: $\operatorname{ctg} x = 0,7826$. В колонках котангенсов находим: $0,78129 = \operatorname{ctg} 52^\circ$; $0,80978 = \operatorname{ctg} 51^\circ$.

Так как $0,80978 > 0,7826 > 0,78129$, то $51^\circ < x < 52^\circ$, и потому лучше принять $x = 52^\circ$ (с точностью до 1°).

207. Зависимость между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

1) Из прямоугольного треугольника ABC находим (рис. 216):

$$\frac{b}{a} = \sin B; \quad \frac{c}{a} = \cos B,$$

откуда

$$b = a \sin B; \quad c = a \cos B.$$

Так как $B = 90^\circ - C$, то $\sin B = \cos C$, и $\cos B = \sin C$; значит, предыдущие равенства можно дополнить так:

$$b = a \sin B = a \cos C;$$

$$c = a \cos B = a \sin C.$$

Таким образом, катет прямоугольного треугольника равен его гипотенузе, умноженной на синус угла, противолежащего этому катету, или на косинус угла, прилежащего к нему.

2) Из того же треугольника находим:

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} B; \quad \frac{c}{b} = \operatorname{ctg} B,$$

откуда

$$b = c \operatorname{tg} B; \quad c = b \operatorname{ctg} B.$$

Но $\operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} (90^\circ - B) = \operatorname{ctg} C$ и $\operatorname{ctg} B = \operatorname{tg} (90^\circ - B) = \operatorname{tg} C$; поэтому можно написать:

$$b = c \operatorname{tg} B = c \operatorname{ctg} C; \quad c = b \operatorname{ctg} B = b \operatorname{tg} C,$$

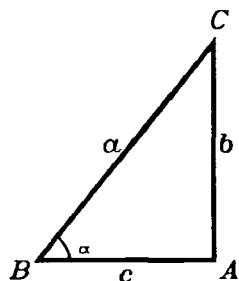


Рис. 216.

т. е. катет равен другому катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего первому катету, или на котангенс угла, прилежащего к нему.

208. Решение прямоугольных треугольников. Указанные зависимости позволяют нам решать прямоугольный треугольник, т. е. по некоторым данным элементам его вычислять остальные. Приведем пример.

Пример. В прямоугольном треугольнике известны: гипотенуза $a=4,5$ и угол $C=42^\circ$. Найти катеты и угол B .

$$b = a \cos C = 4,5 \cdot \cos 42^\circ; \quad c = a \sin C = 4,5 \cdot \sin 42^\circ.$$

Из таблицы находим (ограничиваясь 2 десятичными знаками):

$$\sin 42^\circ = 0,67, \quad \cos 42^\circ = 0,74.$$

Значит: $b = 4,5 \cdot 0,74 = 3,3$; $c = 4,5 \cdot 0,67 = 3,0$; $B = 90^\circ - C = 48^\circ$.

IX. ПОНЯТИЕ О ПРИЛОЖЕНИИ АЛГЕБРЫ К ГЕОМЕТРИИ

209. Задача. *Данный отрезок разделить в среднем и крайнем отношении.*

Эту задачу надо понимать так: разделить данный отрезок на такие две части, чтобы большая из них была средней пропорциональной между всей линией и меньшей ее частью.

Задача будет решена, если мы найдем одну из двух частей, на которые требуется разделить данный отрезок. Будем находить большую часть, т. е. ту, которая должна быть средней пропорциональной между всем отрезком и меньшей его частью. Предположим сначала, что речь идет не о построении этой части, а только о вычислении ее длины. Тогда задача решается алгебраически так: если длину данного отрезка обозначим a , а длину большей части x , то длина другой части будет равна $a-x$ и, согласно требованию задачи, мы будем иметь пропорцию:

$$a : x = x : (a - x),$$

откуда

$$x^2 = a(a-x), \text{ или } x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, находим:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}; \quad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}.$$

Отбросив второе решение как отрицательное, возьмем только первое положительное решение, которое удобнее представить так:

$$x_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} - \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2} = a \cdot 0,61803....$$

Таким образом, задача всегда возможна и имеет только одно решение.

Если бы нам удалось построить такой отрезок, длина которого численно выражается найденной выше формулой, то, нанеся этот отрезок на данный отрезок, мы разделили бы его в среднем и крайнем отношении. Итак, вопрос сводится к построению найденной формулы. Построить эту формулу всего удобнее, если мы ее возьмем в том виде, в котором она была до упрощения, т. е. возьмем:

$$x_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}.$$

Рассматривая отдельно выражение $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$, мы замечаем, что оно представляет собой длину гипотенузы такого прямоугольного треугольника, у которого один катет равен a , а другой $\frac{a}{2}$. Построив такой треугольник, мы найдем отрезок, выражаемый формулой

$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. Чтобы получить

затем отрезок x_1 , достаточно из гипотенузы построенного треугольника вычесть $\frac{a}{2}$. Таким

образом, построение можно выполнить так.

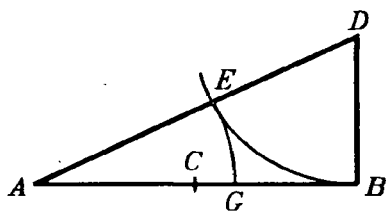


Рис. 217.

Делим (рис. 217) данный отрезок $AB=a$ пополам в точке C . Из конца B восстанавливаем перпендикуляр и откладываем на нем $BD=BC$. Соединив A с D прямой, получим прямоугольный $\triangle ABD$, у которого один катет $AB=a$, а другой катет

$BD = \frac{a}{2}$. Следовательно, его гипотенуза AD равна $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$.

Чтобы вычесть из гипотенузы длину $\frac{a}{2}$, опишем дугу радиусом $BD = \frac{a}{2}$ с центром в точке D . Тогда отрезок AE будет ра-

вен $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$, т. е. будет равен x_1 . Отложив AE на AB (от A до G), получим точку G , в которой отрезок AB делится в среднем и крайнем отношении¹.

Замечание. Деление отрезка в среднем и крайнем отношении нужно в геометрии для построения правильного 10-угольника, вписанного в данный круг.

210. Алгебраический способ решения геометрических задач. Мы решили предложенную задачу путем приложения алгебры к геометрии. Этот прием состоит в следующем: сперва определяют, какой отрезок прямой должно отыскать, чтобы можно было решить задачу. Затем, обозначив длины данных отрезков прямой буквами $a, b, c, \dots$, а искомого буквой x , составляют из условий задачи и известных теорем уравнение, связывающее длину искомого отрезка прямой с длинами данных, и полученное уравнение решают по правилам алгебры. Найденную формулу исследуют, т. е. определяют, при всяких ли заданиях эта формула дает возможные решения или только при некоторых и получается ли одно решение или несколько. Затем строят формулу, т. е. находят построением такой отрезок прямой, численная величина которого выражается этой формулой.

Таким образом, алгебраический прием решения геометрических задач состоит в общем из следующих четырех частей: 1) составление уравнения, 2) решение его, 3) исследование полученной формулы и 4) построение ее.

Иногда задача приводится к отысканию нескольких отрезков прямой. Тогда, обозначив численные величины их буквами $x, y, \dots$, стремятся составить столько уравнений, сколько неизвестных.

211. Построение простейших формул. Укажем простейшие формулы, которые можно построить посредством

¹ Деление отрезка в среднем и крайнем отношении известно под названием золотого сечения.

циркуля и линейки; при этом будем предполагать, что буквы $a, b, c, \dots$ означают длины данных отрезков прямой, а x — длину искомого. Не останавливаясь на таких формулах:

$$x=a+b+c, x=a-b, x=2a, 3a, \dots,$$

построение которых выполняется весьма просто, перейдем к более сложным:

1) Формулы $x = \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \dots, x = \frac{2}{3}a, \dots$ строятся посредством деления отрезка a на равные части, затем, если нужно, повторением одной части слагаемым 2, 3, ... и так далее раз.

2) Формула $x = \frac{ab}{c}$ выражает четвертую пропорциональную к отрезкам прямой c, a и b . Действительно, из этого равенства выводим:

$$cx = ab,$$

откуда

$$c:a=b:x.$$

Следовательно, x найдется способом, указанным нами для построения четвертой пропорциональной (§ 185).

3) Формула $x = \frac{a^2}{b}$ выражает четвертую пропорциональную к отрезкам прямой b, a и a , или, как говорят, третью пропорциональную к отрезкам b и a . Действительно, из данного равенства выводим:

$$bx = a^2,$$

откуда

$$b:a=a:x.$$

Следовательно, x найдется тем же способом, каким отыскивается четвертая пропорциональная (только отрезок a придется откладывать два раза).

4) Формула $x = \sqrt{ab}$ выражает среднюю пропорциональную между a и b . Действительно, из нее выводим:

$$x^2 = ab,$$

откуда

$$a:x=x:b.$$

Следовательно, x найдется способом, указанным раньше для построения средней пропорциональной (§ 190).

5) Формула $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ выражает гипотенузу прямоугольного треугольника, у которого катеты суть a и b .

6) Формула $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ представляет катет прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза есть a , а другой катет b .

Указанные формулы можно считать основными. При помощи их строятся более сложные формулы. Например:

7) $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Подведя a под знак радикала, получим:

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \sqrt{a \cdot \frac{2}{3}a}.$$

Отсюда видно, что x есть средняя пропорциональная между отрезками a и $\frac{2}{3}a$.

8) $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 + d^2}$. Положим, что $a^2 + b^2 = k^2$. Тогда k найдется как гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого катеты суть a и b . Построив k , положим, что $k^2 + d^2 = l^2$. Тогда l найдется как гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого катеты суть k и d . Построив l , будем иметь $x = \sqrt{l^2 - c^2}$. Следовательно, x есть катет такого треугольника, у которого гипотенуза l , а другой катет c .

Ограничимся этими примерами. Заметим, что подобное рассмотрение способов построения алгебраических формул приводит к следующему важному выводу:

С помощью линейки и циркуля возможно строить только такие алгебраические выражения, которые могут быть получены из известных величин с помощью конечного числа рациональных операций и извлечения квадратных корней.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать теоремы

1. Прямая, проведенная через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения непараллельных сторон и через точку пересечения диагоналей.

2. Если в треугольнике из вершины угла, лежащего между неравными сторонами, проведены биссектриса и медиана, то первая меньше второй.

3. Если два круга касаются извне, то часть внешней общей касательной, ограниченная точками касания, есть средняя пропорциональная между диаметрами кругов.

4. Если на сторонах угла отложим от вершины пропорциональные отрезки, то прямые, соединяющие соответственные концы их, будут параллельны.

5. Если в прямоугольный $\triangle ABC$ вписать квадрат $DEFG$ так, чтобы сторона DE лежала на гипотенузе BC , то эта сторона есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы BD и EC (точки на гипотенузе следуют в порядке B, D, E, C).

6. Если два отрезка AB и CD пересекаются (хотя бы и при продолжении) в точке E так, что $BE \cdot EA = EC \cdot ED$, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности (теорема, обратная изложенным в § 200 и § 202).

7. Дана окружность O и две точки A и B . Через эти точки проведено несколько окружностей, пересекающих окружность O или касающихся ее. Доказать, что все хорды, соединяющие точки пересечения каждой из этих окружностей с окружностью O , а также и общие касательные сходятся (при продолжении) в одной точке, лежащей на продолжении AB .

8. Основываясь на свойстве, изложенном в предыдущей задаче, вывести способ построения такой окружности, которая проходит через две данные точки A и B и касается данной окружности O .

9. Даны два каких-нибудь круга на плоскости. Если два радиуса этих кругов движутся, оставаясь постоянно параллельными, то прямая, проходящая через концы их, пересекает линию центров всегда в одной и той же точке (в центре подобия двух кругов).

10. Медиана треугольника делит пополам все прямые, проведенные внутри треугольника параллельно той стороне, относительно которой взята медиана.

11. Даны три прямые, исходящие из одной точки. Если по одной из них движется какая-нибудь точка, то расстояния ее от двух других прямых сохраняют всегда одно и то же отношение.

12. Если две окружности концентрические, то сумма квадратов расстояний всякой точки одной из них от концов какого угодно диаметра другой есть величина постоянная (§ 197).

13. Если соединим прямыми основания трех высот какого-нибудь треугольника, то образовавшиеся при этом три

треугольника у вершин данного подобны ему. Вывести отсюда, что для треугольника, имеющего сторонами прямые, соединяющие основания высот данного треугольника, эти высоты служат биссектрисами.

14. Диаметр AB данной окружности продолжен за точку B . Через какую-нибудь точку C этого продолжения проведена прямая $CD \perp AB$. Если произвольную точку M этого перпендикуляра соединим с A , то (обозначим через A_1 вторую точку пересечения с окружностью этой прямой) произведение $AM \cdot AA_1$ есть величина постоянная для всякой точки M .

Найти геометрические места

15. Середина всех хорд, проходящих через данную точку окружности.

16. Точек, делящих в одном и том же отношении $m:n$ все хорды, проходящие через данную точку окружности.

17. Точек, расстояние которых от сторон данного угла имеет одно и то же отношение $m:n$.

18. Точек, для которых сумма квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная (§ 197).

19. Точек, для которых разность квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная.

20. Точек, делящих в данном отношении $m:n$ все прямые, соединяющие точки окружности с данной точкой O (лежащей вне или внутри круга).

Задачи на построение

21. Через точку, данную внутри или вне угла, провести прямую так, чтобы отрезки ее, заключенные между этой точкой и сторонами угла, имели данное отношение $m:n$.

22. Найти в треугольнике такую точку, чтобы перпендикуляры, опущенные из нее на стороны треугольника, находились в данном отношении $m:n:p$ (см. упражнение 17).

23. Построить треугольник по углу, одной из сторон, прилежащих к нему, и по отношению этой стороны к третьей стороне (сколько решений?).

24. То же — по углу при вершине, основанию и отношению его к одной из боковых сторон.

25. То же — по высоте, углу при вершине и отношению отрезков основания.

26. То же — по углу при вершине, основанию и данной на основании точке, через которую проходит биссектриса угла при вершине.

27. То же — по двум углам и сумме или разности основания с высотой.

28. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и сумме основания с высотой.

29. На бесконечной прямой MN даны две точки A и B . Найти на этой прямой третью точку C , чтобы $CA : CB = m : n$, где m и n — данные отрезки прямой или данные числа (если $m \neq n$, то таких точек существует две: одна между A и B , другая вне отрезка AB).

30. Вписать в данный круг треугольник, у которого даны: основание и отношение двух сторон.

31. Вписать в данный круг треугольник, у которого даны: основание и медиана относительно одной из неизвестных сторон.

32. Вписать квадрат в данный сегмент так, чтобы одна его сторона лежала на хорде, а вершины противоположащих углов — на дуге.

У к а з а н и е. Задачи решаются методом подобия (§ 181).

33. Вписать квадрат в данный треугольник так, чтобы одна сторона его лежала на основании треугольника, а вершины противоположащих углов — на боковых сторонах треугольника.

34. В данный треугольник вписать прямоугольник (см. предыдущую задачу), у которого стороны относились бы, как $m : n$.

35. Около данного квадрата описать треугольник, подобный данному треугольнику.

36. Дана окружность и на ней две точки A и B . Найти на этой окружности третью точку C , чтобы расстояния ее от A и B находились в данном отношении.

37. Построить треугольник по двум сторонам и биссектрисе угла между ними (см. рис. 196: сначала находим прямую CE из пропорции: $CE : BD = AE : AB$, затем строим $\triangle BCE$ и т. д.).

38. Построить отрезок x , который относился бы к данному отрезку m , как $a^2 : b^2$ (a и b — данные отрезки прямой).

39. Найти вне данного круга такую точку, чтобы касательная, проведенная из нее к этой окружности, была вдвое

меньше секущей, проведенной из той же точки через центр (приложением алгебры к геометрии).

40. Через данную вне круга точку провести такую секущую, которая разделилась бы этой окружностью в данном отношении (приложением алгебры к геометрии).

41. Построить треугольник по трем его высотам h_1, h_2, h_3 .
Решение. Предварительно из подобия прямоугольных треугольников надо доказать, что высоты обратно пропорциональны соответствующим сторонам. Если стороны, на которые опущены высоты h_1, h_2, h_3 , обозначим соответственно через x_1, x_2, x_3 , то

$$x_1 : x_2 = h_1 : h_2, \\ x_2 : x_3 = h_2 : h_3 = 1 : \frac{h_2}{h_3} = h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3},$$

откуда

$$x_1 : x_2 : x_3 = h_2 : h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3}.$$

Выражение $\frac{h_1 h_2}{h_3}$ есть четвертая пропорциональная к h_3, h_2 и h_1 . Построив ее (пусть это будет k), мы будем иметь три отрезка прямой: h_2, h_1 и k , которым искомые стороны пропорциональны; значит, треугольник, имеющий эти отрезки сторонами, подобен искомому, и потому вопрос приводится к построению такого треугольника, который, будучи подобен данному, имел бы данную высоту. Задача окажется невозможной, если по трем прямым h_2, h_1 и k нельзя построить треугольник.

42. Построить отрезки, выражаемые формулами:

$$1) x = \frac{abc}{de} = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e}$$

(придется два раза построить четвертую пропорциональную);

$$2) x = \sqrt{a^2 + bc}$$

(предварительно построить отрезок $k = \sqrt{bc}$, потом $x = \sqrt{a^2 + k^2}$).

Задачи на вычисление

43. По данному основанию a и высоте h остроугольного треугольника вычислить сторону x квадрата, вписанного в этот треугольник так, что одна сторона квадрата лежит на

основании треугольника, а две вершины квадрата — на боковых сторонах треугольника.

44. Стороны треугольника суть 10, 12 и 17 м. Вычислить отрезки стороны, равной 17 м, на которые она делится биссектрисой противолежащего угла.

45. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, делит ее на два отрезка m и n . Вычислить катеты.

46. По трем сторонам a , b и c треугольника ABC вычислить медиану AD , проведенную к стороне BC .

Указание. Продолжив AD на расстояние $DE = AD$ и соединив точку E с B и C , получим параллелограмм, к которому применим теорему § 197.

47. В $\triangle ABC$ стороны равны: $AB=7$, $BC=15$ и $AC=10$. Определить, какого вида угол A , и вычислить высоту, опущенную из вершины B .

48. Из точки вне круга проведена касательная a и секущая. Вычислить длину секущей, зная, что отношение внешней ее части к внутренней равно $m:n$.

49. К двум кругам, радиусы которых суть R и r , а расстояние между центрами d , проведена общая касательная. Определить вычислением положение точки пересечения этой касательной с линией центров, во-первых, когда эта точка лежит по одну сторону от центров, во-вторых, когда она расположена между ними.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ

I. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

212. Определения. Ломаная линия называется **правильной**, если она удовлетворяет следующим трем условиям: 1) отрезки прямых, составляющие ее, равны; 2) углы, составленные каждым двумя соседними отрезками, равны и 3) из каждых трех последовательных отрезков первый и третий расположены по одну сторону от прямой, на которой лежит второй.

Таковы, например, линии $ABCDE$ и $FGHKL$ (рис. 218); но ломаную $MNPQR$ нельзя назвать правильной, потому что она не удовлетворяет третьему условию.

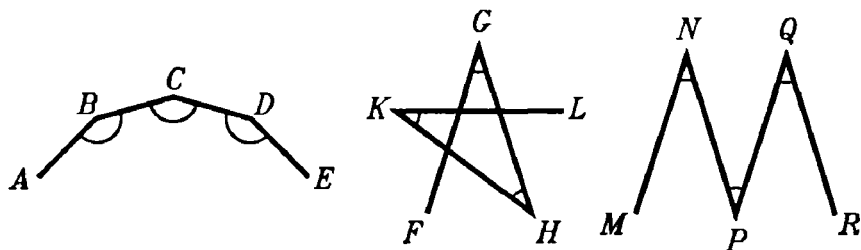


Рис. 218.

Правильная ломаная может быть **выпуклой**, как, например, линия $ABCDE$.

Многоугольник называется **правильным**, если он ограничен правильной ломаной линией, т. е. если он имеет равные стороны и равные углы. Таковы, например, квадрат, равносторонний треугольник и др.

Многоугольник, изображенный на рисунке 219, есть **выпуклый** правильный пятиугольник; многоугольник рисунка 220 — также правильный пятиугольник, но не выпуклый

(так называемый звездчатый). В нашем курсе геометрии мы будем рассматривать только выпуклые правильные многоугольники, и поэтому, когда мы скажем «правильный многоугольник», мы будем подразумевать слово «выпуклый».

Последующие теоремы показывают, что построение правильных многоугольников тесно связано с разделением окружности на равные части.

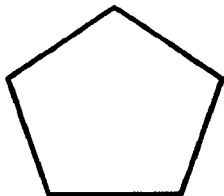


Рис. 219.

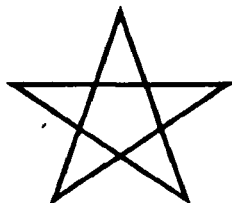


Рис. 220.

213. Теорема. Если окружность разделена на некоторое число равных частей (больше двух), то:

- 1) соединив хордами каждые две соседние точки деления, получим правильный многоугольник (вписанный);
- 2) проведя через все точки деления касательные и продолжив каждую из них до взаимного пересечения с касательными соседних точек деления, получим правильный многоугольник (описанный).

Пусть окружность (рис. 221) разделена на несколько равных частей в точках A, B, C и т. д. и через эти точки проведены хорды $AB, BC, \dots$ и касательные MBN, NCP и т. д. Тогда:

1) Вписанный многоугольник $ABCDEF$ — правильный, потому что все его стороны равны (как хорды, стягивающие равные дуги) и все углы равны (как вписанные, опирающиеся на равные дуги).

2) Чтобы доказать правильность описанного многоугольника $MNPQRS$, рассмотрим треугольники AMB, BNC и т. д. У них основания AB, BC и т. д. равны; углы, прилежащие к этим основаниям, также равны, потому что каждый из них имеет одинаковую меру (угол, составленный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, заключенной внутри него). Значит, все эти тре-

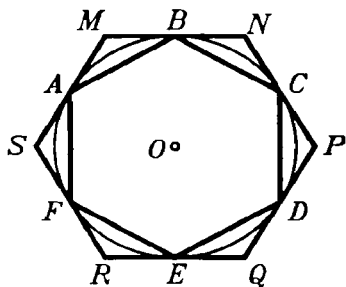


Рис. 221.

угольники равнобедренные и равны между собой, а потому $MN=NP=...$ и $\angle M=\angle N=...$, т. е. многоугольник $MNPQRS$ правильный.

214. Замечание. Если из центра O (рис. 222) опустим на хорды AB , BC и т. д. перпендикуляры и продолжим их до пересечения с окружностью в точках M , N и т. д., то эти точки разделят все дуги и хорды пополам и тем самым разделят окружность на равные части. Поэтому, если через точки M , N и т. д. проведем касательные до взаимного пересечения, как указано выше, то получим также правильный описанный многоугольник, стороны которого будут параллельны сторонам вписанного многоугольника. Каждая пара вершин A и A_1 , B и B_1 и т. д. лежит на одной прямой с центром, а именно: на биссектрисе угла MON и других таких же углов.

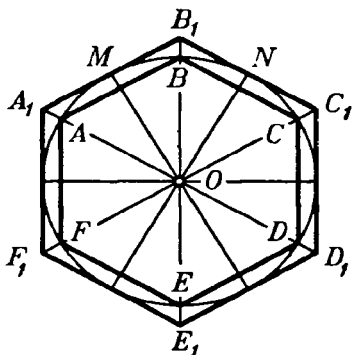


Рис. 222.

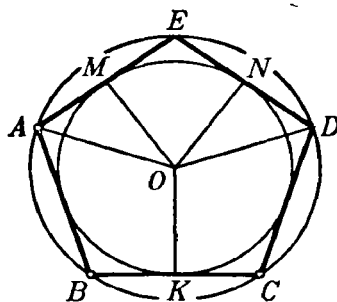


Рис. 223.

215. Теорема. Если многоугольник правильный, то:

- 1) около него можно описать окружность;
- 2) в него можно вписать окружность.

1) Проведем окружность через какие-нибудь три соседние вершины A , B и C (рис. 223) правильного многоугольника $ABCDE$ и докажем, что она пройдет через следующую, четвертую вершину D . Опустим из центра O перпендикуляр OK на хорду BC и соединим O с A и D . Повернем четырехугольник $ABKO$ вокруг стороны OK так, чтобы он упал на четырехугольник $ODCK$. Тогда KB пойдет по KC (вследствие равенства прямых углов при точке K), точка B упадет в C (так как хорда BC делится в точке K пополам), сторона BA пойдет по CD (вследствие равенства углов B и C) и, наконец,

точка A упадет в D (вследствие равенства сторон BA и CD). Из этого следует, что OA совместится с OD , и, значит, точки A и D одинаково удалены от центра; поэтому вершина D должна лежать на окружности, проходящей через A , B и C . Точно так же докажем, что эта окружность, проходя через три соседние вершины B , C и D , пройдет через следующую вершину E , и т. д.; значит, она пройдет через все вершины многоугольника.

2) Из доказанного следует, что стороны правильного многоугольника всегда можно рассматривать как равные хорды одной окружности; но такие хорды одинаково удалены от центра; значит, все перпендикуляры OM , ON и т. д., опущенные из O на стороны многоугольника, равны между собой, и потому окружность, описанная радиусом OM с центром в точке O , будет вписанной в многоугольник $ABCDE$.

216. Следствие. Из предыдущего видно, что две окружности, описанная около правильного многоугольника и вписанная в него, имеют один и тот же центр. Так как этот общий центр одинаково удален от всех вершин многоугольника, то он должен лежать на перпендикуляре, восстановленном к любой стороне многоугольника из ее середины, а будучи одинаково удален от сторон каждого угла, он должен находиться на его биссектрисе. Поэтому, чтобы найти центр окружности, описанной около правильного многоугольника или вписанной в него, достаточно определить точку пересечения двух перпендикуляров, восстановленных к сторонам многоугольника из их середин, или двух биссектрис углов, или одного такого перпендикуляра с биссектрисой.

Легко заметить, что перпендикуляры, восстановленные к сторонам правильного многоугольника в серединах этих сторон, а также биссектрисы всех углов правильного многоугольника являются его осями симметрии.

217. Определения. Общий центр окружностей, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него, называется **центром** этого многоугольника, радиус вписанной окружности — **апофемой** его.

Угол, составленный двумя радиусами, проведенными к концам какой-нибудь стороны правильного многоугольника, называется **центральный углом**. Центральных углов в многоугольнике столько, сколько сторон; все они равны как измеряющиеся равными дугами.

Так как сумма всех центральных углов равна $4d$, или 360° , то каждый из них равен $4d:n$, или $360^\circ:n$, если n означает число сторон многоугольника; так, центральный угол правильного шестиугольника равен $360^\circ:6=60^\circ$, правильного восьмиугольника равен $360^\circ:8=45^\circ$ и т. п.

Так как сумма всех внутренних углов многоугольника, имеющего n сторон, равна $2d(n-2)$, то каждый внутренний угол правильного многоугольника, имеющего n сторон, равен:

$$\frac{2d(n-2)}{n}.$$

Например, у правильного восьмиугольника внутренний угол равен:

$$\frac{2d(8-2)}{8} = \frac{12d}{8} = \frac{3}{2}d = 135^\circ.$$

218. Теорема. *Правильные одноименные многоугольники подобны и стороны их относятся, как радиусы или апофемы.*

1) Чтобы доказать подобие (рис. 224) правильных одноименных многоугольников $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, достаточно обнаружить, что у них углы равны и стороны пропорциональны.

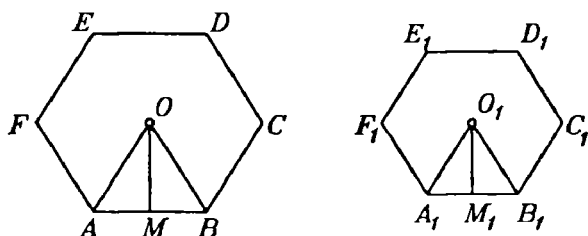


Рис. 224.

Углы многоугольников равны, так как каждый из них содержит одно и то же число градусов, а именно: $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$,

если n означает число сторон каждого многоугольника. Так как $AB=BC=CD=\dots$ и $A_1B_1=B_1C_1=C_1D_1=\dots$, то очевидно, что

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \dots,$$

т. е. у таких многоугольников стороны пропорциональны.

2) Пусть O и O_1 (рис. 224) будут центры данных многоугольников, OA и O_1A_1 — их радиусы, OM и O_1M_1 — апофемы. Треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ подобны, так как углы одного соответственно равны углам другого.

Из подобия их следует:
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{OM}{O_1M_1}.$$

Следствие. Так как периметры подобных многоугольников относятся, как сходственные стороны (§ 172), то *периметры правильных одноименных многоугольников относятся, как радиусы или как апофемы.*

219. Задача. Вычислить сторону вписанного в круг: 1) квадрата; 2) правильного шестиугольника; 3) правильного треугольника.

Условимся обозначать длину стороны правильного многоугольника, имеющего n сторон, буквой a_n , а его периметр — буквой p_n .

Формулы для сторон вписанного квадрата, шестиугольника и треугольника можно легко получить из рассмотрения рисунков 225, 226 и 227.

1) На рисунке 225 проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AC и BD и последовательные концы их соединены хордами; от этого получился **вписанный квадрат** $ABCD$.

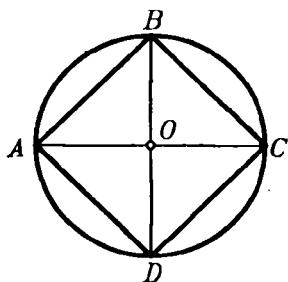


Рис. 225.

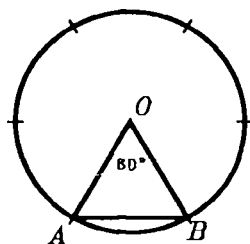


Рис. 226.

Из прямоугольного $\triangle AOB$ находим:

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 = 2R^2,$$

откуда

$$a_4 = R\sqrt{2}.$$

220. 2) На рисунке 226 построена хорда, соответствующая центральному углу в 60° (сторона правильного вписанного шестиугольника).

Так как сумма всех центральных углов равна $4d$, или 360° , то каждый из них равен $4d:n$, или $360^\circ:n$, если n означает число сторон многоугольника; так, центральный угол правильного шестиугольника равен $360^\circ:6=60^\circ$, правильного восьмиугольника равен $360^\circ:8=45^\circ$ и т. п.

Так как сумма всех внутренних углов многоугольника, имеющего n сторон, равна $2d(n-2)$, то каждый внутренний угол правильного многоугольника, имеющего n сторон, равен:

$$\frac{2d(n-2)}{n}.$$

Например, у правильного восьмиугольника внутренний угол равен:

$$\frac{2d(8-2)}{8} = \frac{12d}{8} = \frac{3}{2}d = 135^\circ.$$

218. Теорема. *Правильные одноименные многоугольники подобны и стороны их относятся, как радиусы или апофемы.*

1) Чтобы доказать подобие (рис. 224) правильных одноименных многоугольников $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, достаточно обнаружить, что у них углы равны и стороны пропорциональны.

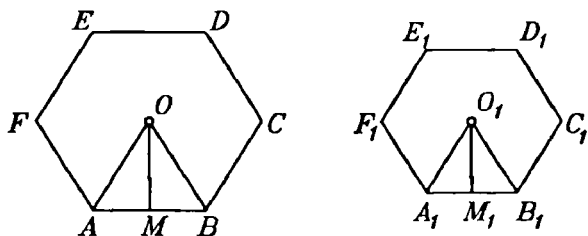


Рис. 224.

Углы многоугольников равны, так как каждый из них содержит одно и то же число градусов, а именно: $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$,

если n означает число сторон каждого многоугольника. Так как $AB=BC=CD=\dots$ и $A_1B_1=B_1C_1=C_1D_1=\dots$, то очевидно, что

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \dots,$$

т. е. у таких многоугольников стороны пропорциональны.

2) Пусть O и O_1 (рис. 224) будут центры данных многоугольников, OA и O_1A_1 — их радиусы, OM и O_1M_1 — апофемы. Треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ подобны, так как углы одного соответственно равны углам другого.

Из подобия их следует: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{OM}{O_1M_1}$.

Следствие. Так как периметры подобных многоугольников относятся, как сходственные стороны (§ 172), то *периметры правильных одноименных многоугольников относятся, как радиусы или как апофемы.*

219. Задача. Вычислить сторону вписанного в круг: 1) квадрата; 2) правильного шестиугольника; 3) правильного треугольника.

Условимся обозначать длину стороны правильного многоугольника, имеющего n сторон, буквой a_n , а его периметр — буквой p_n .

Формулы для сторон вписанного квадрата, шестиугольника и треугольника можно легко получить из рассмотрения рисунков 225, 226 и 227.

1) На рисунке 225 проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AC и BD и последовательные концы их соединены хордами; от этого получился **вписанный квадрат** $ABCD$.

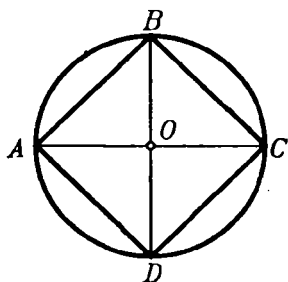


Рис. 225.

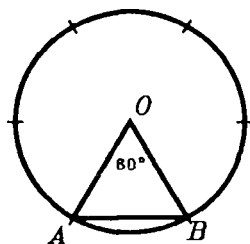


Рис. 226.

Из прямоугольного $\triangle AOB$ находим:

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 = 2R^2,$$

откуда

$$a_4 = R\sqrt{2}.$$

220. 2) На рисунке 226 построена хорда, соответствующая центральному углу в 60° (сторона правильного вписанного шестиугольника).

Так как у равнобедренного $\triangle AOB$ каждый из углов A и B равен $(180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$, то $\triangle AOB$ есть равноугольный и, следовательно, равносторонний; значит,

$$AB = AO, \text{ т. е. } a_6 = R.$$

Так мы получаем простой способ деления окружности на шесть равных частей.

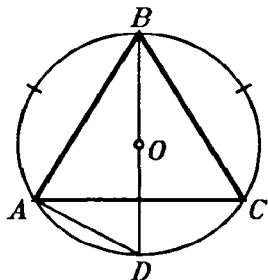


Рис. 227.

221. 3) На рисунке 227 окружность разделена на шесть равных частей и точки деления через одну последовательно соединены хордами, отчего образовался вписанный равносторонний $\triangle ABC$. Проведя хорду AD , получаем прямоугольный треугольник ABD (угол BAD как вписанный, опирающийся на диаметр, есть прямой). Из $\triangle ABD$ находим:

$$AB = \sqrt{BD^2 - AD^2},$$

т. е. $a_3 = \sqrt{(2R)^2 - R^2}$, и, значит, $a_3 = R\sqrt{3}$.

222. Задача. Вписать в данный круг правильный десятиугольник и определить его сторону в зависимости от радиуса.

Предварительно докажем одно важное свойство правильного 10-угольника. Пусть хорда AB (рис. 228) есть сторона правильного 10-угольника. Тогда угол AOB равен 36° , а каждый из углов A и B содержит по $\frac{1}{2}(180^\circ - 36^\circ)$, т. е. по 72° . Разделим угол A пополам прямой AC . Каждый из углов, образовавшихся при точке A , равен 36° ; следовательно, $\triangle ACO$, имея два равных угла, есть равнобедренный, т. е. $AC = CO$, $\triangle ABC$ также равнобедренный, потому что $\angle B = 72^\circ$ и $\angle ACB = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$; следовательно, $AB = AC = CO$. По свойству биссектрисы угла треугольника (§ 186) можно написать:

$$AO : AB = OC : CB. \quad (1)$$

Заменяя AO и AB равными им отрезками OB и OC , получим:

$$OB : OC = OC : CB, \quad (2)$$

т. е. радиус OB разделен в точке C в среднем и крайнем отношении, причем OC есть его большая часть. Но OC равна стороне правильного вписанного 10-угольника; значит, сторона правильного вписанного 10-угольника равна большей части радиуса, разделенного в среднем и крайнем отношении.

Теперь задача решается легко:

1) Делят радиус круга (например, OA , рис. 229) в среднем и крайнем отношении; затем, дав циркулю раствор, равный большей части радиуса, от-

кладывают им по окружности дуги, одна за другой, и точки деления последовательно соединяют хордами.

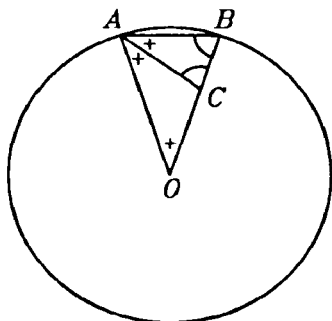


Рис. 228.

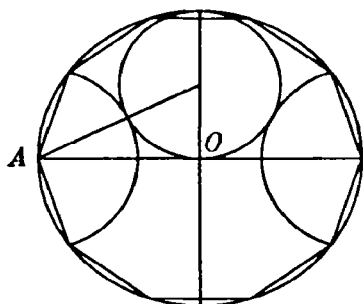


Рис. 229.

2) Обозначив длину стороны правильного вписанного 10-угольника буквой x , мы можем пропорцию (2) переписать так:

$$R : x = x : (R - x),$$

откуда

$$x^2 + Rx - R^2 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, найдем:

$$x = a_{10} = R \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = R \cdot 0,61803 \dots$$

223. Замечания. 1) Чтобы вписать в данный круг правильный пятиугольник, делят окружность на 10 равных частей (как указано выше) и точки деления соединяют через одну хордами.

2) Из равенства

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5}{30} - \frac{3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

видно, что если из $\frac{1}{6}$ части окружности вычесть $\frac{1}{10}$ ее часть, то остаток будет равен $\frac{1}{15}$ окружности. Это дает нам простой способ вписать в окружность правильный 15-угольник, так как делить окружность на 6 и на 10 частей мы умеем.

3) Чтобы построить пятиконечную звезду (рис. 230), делят окружность на 10 равных частей и точки деления соединяют хордами через три, как указано на рисунке.

224. Задача. Удвоить число сторон правильного вписанного многоугольника.

В этом сокращенном выражении разумеются, собственно, две задачи: 1) по данному правильному вписанному многоугольнику построить другой правильный многоугольник, вписанный в ту же окружность, но имеющий вдвое больше сторон; 2) вычислить сторону этого многоугольника по данной стороне первого многоугольника и данному радиусу круга.

1) Пусть AB (рис. 231) есть сторона правильного вписанного многоугольника, имеющего n сторон и O — центр круга. Проведем $OC \perp AB$ и соединим A с C . Дуга AB делится в точке C пополам; следовательно, хорда AC есть сторона правильного вписанного многоугольника, имеющего $2n$ сторон.

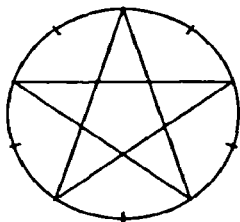


Рис. 230.

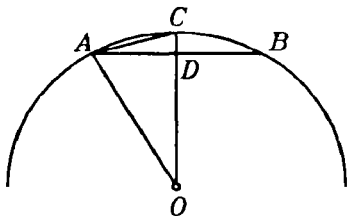


Рис. 231.

2) В $\triangle ACO$ угол O всегда острый (так как дуга ACB всегда меньше полуокружности и, следовательно, половина ее, дуга AC , меньше четверти окружности); поэтому (§ 194)

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OC \cdot OD,$$

т. е.

$$a_{2n}^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot OD = 2R^2 - 2R \cdot OD.$$

Из прямоугольного $\triangle AOD$ определим катет OD :

$$OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Следовательно,
$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Такова формула удвоения числа сторон правильного вписанного многоугольника (из нее сторону a_{2n} получим посредством извлечения квадратного корня).

Пример. Вычислим сторону правильного вписанного 12-угольника, причем для простоты примем $R=1$ (и, следовательно, $a_6=1$):

$$a_{12}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}} = 2 - \sqrt{3},$$

откуда $a_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0,517 \dots$

Так как стороны правильных одноименных многоугольников пропорциональны их радиусам (§ 218), то при

радиусе, равном не единице, а какому-нибудь числу R , для стороны правильного 12-угольника получим такую формулу:

$$a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} = R \cdot 0,517 \dots$$

225. На сколько равных частей можно делить окружность с помощью циркуля и линейки? Применяя указанные в предыдущих задачах способы, мы можем с помощью циркуля и линейки делить окружность на такое число равных частей (и, следовательно, вписывать в окружность правильные многоугольники с таким числом сторон), которое заключается в следующей таблице:

3	$3 \cdot 2$	$3 \cdot 2 \cdot 2 \dots$	вообще	$3 \cdot 2^n$
4	$4 \cdot 2$	$4 \cdot 2 \cdot 2 \dots$	»	2^n
5	$5 \cdot 2$	$5 \cdot 2 \cdot 2 \dots$	»	$5 \cdot 2^n$
15	$15 \cdot 2$	$15 \cdot 2 \cdot 2 \dots$	»	$3 \cdot 5 \cdot 2^n$

Доказано, что посредством циркуля и линейки можно делить окружность на такое число равных частей, которое, будучи *простым*, выражается формулой $2^{2^n} + 1$. Например, можно разделить окружность на 17 равных частей и на 257 равных частей, так как 17 и 257 суть простые числа вида $2^{2^n} + 1$ ($17 = 2^{2^2} + 1$; $257 = 2^{2^3} + 1$). Доказательство этого выходит за пределы элементарной математики.

Доказано также, что с помощью линейки и циркуля окружность можно делить на такое составное число равных частей, в состав которого не входят никакие иные простые множители, кроме: 1) множителей вида $2^{2^n} + 1$ и 2) множителя 2 в какой угодно степени. Например, в окружность с помощью циркуля и линейки можно вписать правильный 170-угольник ($170 = 2 \cdot 5 \cdot 17 = 2 \cdot (2^2 + 1) \cdot \dots \cdot (2^{2^2} + 1)$).

На всякое иное число равных частей окружность может быть разделена *приблизительно*. Пусть, например, требуется разделить окружность на 7 равных частей (или вписать правильный семиугольник). Тогда предварительно вычислим величину центрального угла, он равен: $\frac{360^\circ}{7} = 51 \frac{3^\circ}{7}$. Построить точно такой угол мы не можем, но по транспортиру приблизительно можем отложить при центре угол в 51° и тогда получим приблизительно $\frac{1}{7}$ часть окружности.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Составить формулу для стороны правильного вписанного 24-угольника.

2. Составить формулу для сторон правильных вписанных восьмиугольника и 16-угольника.

3. Составить формулу для сторон правильных описанных треугольника и шестиугольника.

4. Пусть AB , BC и CD будут три последовательные стороны правильного многоугольника, имеющего центр O . Если продолжим стороны AB и CD до взаимного пересечения в точке E , то четырехугольник $OAEC$ может быть вписан в окружность. Доказать.

5. Доказать, что: 1) всякий вписанный равносторонний многоугольник правильный; 2) всякий описанный равноугольный многоугольник правильный.

6. Доказать, что: 1) каждый правильный n -угольник имеет n осей симметрии, причем все эти оси симметрии проходят через его центр; 2) для многоугольника с четным числом сторон центр многоугольника является центром его симметрии.

7. Доказать, что две диагонали правильного пятиугольника, не исходящие из одной вершины, пересекаясь, делятся в среднем и крайнем отношении.

Указание. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник, AC и BE — его диагонали, F — точка их пересечения. $\triangle ABC \sim \triangle ABF$ и т. д.

8. На данной стороне построить: 1) правильный восьмиугольник; 2) правильный 10-угольник.

9. Срезать от данного квадрата углы так, чтобы образовался правильный восьмиугольник.

10. В данный квадрат вписать равносторонний треугольник, помещая одну из его вершин или в вершине квадрата, или в середине какой-либо стороны.

11. Вписать в равносторонний треугольник другой равносторонний треугольник, стороны которого были бы перпендикулярны к сторонам данного.

12. Построить углы: в 18° , 30° , 75° , 72° .

13. Около окружности описан какой-нибудь правильный многоугольник. Пользуясь им, вписать в эту окружность

правильный многоугольник, имеющий вдвое больше сторон, чем описанный.

II. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ И ЕЕ ЧАСТЕЙ

226. Предварительное разъяснение. Отрезок прямой можно сравнить с другим отрезком прямой, принятым за единицу, так как прямые линии при наложении совмещаются. Действительно, только по этой причине мы можем установить, какие отрезки прямых считать равными и неравными; что такое сумма отрезков прямой; какой отрезок более другого в 2, 3, 4, ... раза и т. п. Точно так же дуги окружностей одинакового радиуса можно сравнить между собой вследствие того, что такие дуги при наложении совмещаются. Но так как никакая часть окружности (или другой кривой) не может совместиться с прямой, то нельзя путем наложения установить, какой криволинейный отрезок должно считать равным данному прямолинейному отрезку, а следовательно, и то, какой криволинейный отрезок больше данного прямолинейного в 2, 3, 4, ... раза. Таким образом, является необходимость особо определить, что мы будем подразумевать под длиной окружности (или части ее), когда сравниваем ее с прямолинейным отрезком.

Для этой цели мы должны ввести новое понятие, имеющее исключительно большое значение во всей математике, именно понятие о пределе.

Предел числовой последовательности

227. Во многих вопросах алгебры и геометрии приходится встречаться с последовательностями чисел, написанных одно за другим по определенному закону. Например, натуральный ряд чисел: 1, 2, 3, 4, 5, ..., арифметическая и геометрическая прогрессии, продолженные неограниченно:

$$\begin{aligned} a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, \\ a, aq, aq^2, aq^3, \dots, \end{aligned}$$

представляют собой бесконечные последовательности чисел, или бесконечные числовые последовательности.

Для каждой такой последовательности можно указать правило, по которому составляются ее члены. Так, в арифме-

тической прогрессии каждый член разнится от предыдущего на одно и то же число, в геометрической прогрессии каждый член равен предшествующему, умноженному на некоторое определенное число (знаменатель прогрессии).

Многие последовательности составляются по более сложным правилам. Так, например, вычисляя $\sqrt{2}$ с недостатком, сначала с точностью до $\frac{1}{10}$, затем с точностью до $\frac{1}{100}$, затем до $\frac{1}{1000}$ и продолжая это вычисление неограниченно, мы получим бесконечную числовую последовательность:

$$1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \dots,$$

дающую приближенное значение $\sqrt{2}$ с возрастающей степенью точности.

Для этой последовательности нельзя указать простого правила, по которому можно было бы получить новые ее члены, зная предыдущие, но все же можно определить любой член этой последовательности. Так, чтобы получить 4-й ее член, нужно вычислить $\sqrt{2}$ с точностью до 0,0001, для получения 5-го члена нужно вычислить $\sqrt{2}$ с точностью до 0,00001 и т. д.

Допустим, что члены данной бесконечной последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, по мере повышения их номера, неограниченно приближаются к некоторому числу A . Это значит следующее: существует некоторое число A такое, что какое бы малое положительное число q мы ни взяли, в данной последовательности можно отыскать член, начиная с которого все члены последовательности по абсолютной величине отличаются от A меньше, чем на q . Мы будем это свойство коротко выражать так: абсолютная величина разности $a_n - A$ неограниченно убывает с возрастанием номера n .

В этом случае число A называется пределом данной бесконечной числовой последовательности. Приведем пример такой последовательности. Составим последовательность десятичных дробей:

$$0,9; 0,99; 0,999; \dots$$

Здесь каждый член получается из предыдущего приписыванием нового десятичного знака 9.

Легко заметить, что члены этой последовательности неограниченно приближаются к единице.

Именно, первый член отличается от единицы на $\frac{1}{10}$, второй — на $\frac{1}{100}$, третий — на $\frac{1}{1000}$, и если достаточно продолжить эту последовательность, то можно найти в ней член, начиная с которого все последующие члены будут отличаться от единицы на сколь угодно малую, заранее указанную величину. Следовательно, мы можем сказать, что взятая нами бесконечная числовая последовательность имеет пределом единицу. Другим примером числовой последовательности, имеющей предел, служит последовательность приближенных значений длины отрезка, несоизмеримого с единицей длины (§ 150), вычисленных с недостатком, сначала с точностью до $\frac{1}{10}$, затем — до $\frac{1}{100}$, затем — до $\frac{1}{1000}$ и т. д.

Пределом этой последовательности служит бесконечная десятичная дробь, представляющая точную меру длины данного отрезка. В самом деле, величина бесконечной десятичной дроби заключена между двумя ее приближенными значениями, вычисленными с одинаковой точностью — одно с недостатком, другое с избытком.

Как было показано выше, эта разность неограниченно убывает по мере повышения степени точности приближенных значений. Следовательно, должна неограниченно убывать и разность между самой бесконечной десятичной дробью и ее приближенными значениями по мере повышения степени точности этих значений. Значит, бесконечная десятичная дробь служит пределом последовательности всех ее приближенных значений, взятых с недостатком (или всех приближенных значений, взятых с избытком).

Легко заметить, что не всякая бесконечная последовательность имеет предел; например, натуральный ряд чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots,$$

очевидно, никакого предела не имеет, так как его члены неограниченно возрастают и ни к какому числу не приближаются.

228. Теорема. *Всякая бесконечная числовая последовательность может иметь только один предел.*

В справедливости этой теоремы легко убедиться доказательством от противного. В самом деле, предположим, что дана последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots,$$

которая имеет два различных предела A и B . В таком случае, в силу того, что A есть предел данной последовательности, абсолютная величина разности $a_n - A$ должна неограниченно убывать с возрастанием n . В силу того, что B есть тоже предел данной последовательности, абсолютная величина разности $a_n - B$ также должна неограниченно убывать с возрастанием n .

Но в таком случае абсолютная величина разности

$$(a_n - A) - (a_n - B)$$

должна также или неограниченно убывать, или быть равной нулю. Но эта последняя разность равна разности чисел $B - A$ и, следовательно, есть некоторое вполне определенное, отличное от нуля число. Это число не зависит от номера n и при возрастании n вовсе не изменяется. Таким образом, предположение, что существуют два предела числовой последовательности, привело нас к противоречию.

229. Предел возрастающей бесконечной числовой последовательности. Рассмотрим такую последовательность: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, в которой каждый следующий член больше предыдущего, т. е. $a_{n+1} > a_n$, и в тоже время все члены последовательности меньше некоторого определенного числа M , т. е. для любого номера n $a_n < M$.

В этом случае последовательность имеет определенный предел. (Теорема Вейерштрасса.)

230. Доказательство. Пусть дана бесконечная числовая последовательность:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots, \quad (1)$$

в которой каждый член больше предыдущего или равен ему ($a_{n+1} \geq a_n$), причем среди членов последовательности нет числа, большего данного числа M , например нет числа, большего чем 10. Возьмем число 9 и посмотрим, нет ли среди членов последовательности (1) чисел, больше чем 9. Допустим, что таких нет. Возьмем число 8 и посмотрим, имеются ли в последовательности (1) числа больше, чем 8. Допустим, что такие есть. Тогда записываем число 8, затем делим промежуток от 8 до 9 на 10 частей и испытываем последовательно числа: 8,1; 8,2; 8,3; ..., т. е. смотрим, имеются ли среди членов последовательности (1) числа, большие, чем 8,1. Если есть, то ставим тот же вопрос для числа 8,2, и т. д. Допустим, что в последовательности (1) есть числа, большие, чем 8,6, но нет чисел, больших, чем 8,7. Тогда делаем вторую запись: пишем число 8,6, затем разбиваем промежуток от 8,6 до 8,7 на 10 час-

тей и испытываем таким же образом последовательно числа: 8,61; 8,62; 8,63; Допустим, что в последовательности (1) есть числа, большие, чем 8,64, но нет чисел, больших, чем 8,65. Тогда делаем третью запись 8,64 и поступаем таким же образом для промежутка от 8,64 до 8,65. Продолжая этот процесс неограниченно, мы придем к бесконечной десятичной дроби: 8,64 ... , т. е. к некоторому действительному числу. Назовем его α и возьмем его приближенные значения с n десятичными знаками с недостатком и с избытком. Первое назовем α_n , второе α'_n . При этом, как известно (§ 150), α'_n

$$\alpha_n < \alpha < \alpha'_n \text{ и } \alpha'_n - \alpha_n = \frac{1}{10^n}.$$

Из способа образования действительного числа α следует, что среди членов последовательности (1) нет чисел, больших α'_n , но имеются числа, большие α_n . Пусть a_k — одно из таких чисел;

$$\alpha_n < a_k < \alpha'_n.$$

В силу возрастания последовательности (1) и отсутствия в ней членов, больших α'_n , заключаем, что все следующие члены последовательности a_{k+1} , a_{k+2} , ... также заключены между α_n и α'_n , т. е. если $m > k$, то $\alpha_n < a_m < \alpha'_n$.

Так как действительное число α также заключено между α_n и α'_n , то абсолютная величина разности $a_m - \alpha$ меньше разности чисел α'_n и α_n . Но $\alpha'_n - \alpha_n = \frac{1}{10^n}$, следовательно,

$$|a_m - \alpha| < \frac{1}{10^n}. \quad (2)$$

Таким образом, для любого значения n можно указать такое число k , что при $m \geq k$ имеет место неравенство (2). Так как при неограниченном возрастании n дробь $\frac{1}{10^n}$ неограниченно убывает, то из равенства (2) следует, что действительное число α есть предел последовательности (1). Таким образом, числовая последовательность (1) имеет определенный предел.

231. Предел переменной величины. Если дана последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots,$$

то n -й член ее a_n можно назвать *переменной величиной*, числовое значение которой зависит от ее номера n . Этим выражением «переменная величина» часто пользуются для упрощения речи. Так, вместо выражения «дана бесконечная числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ », принято говорить «дана переменная величина a_n , принимающая последовательно ряд значений $a_1, a_2, a_3, \dots$ ». Если пользоваться этим способом выражения, то можно говорить не о пределе последовательности, а о пределе переменной величины.

В таком случае предложение, доказанное в § 228, можно высказать в форме: «Всякая переменная величина может стремиться лишь к одному пределу». Это предложение часто высказывают так: «Если даны две переменные величины a_n и b_n , причем все значения первой равны соответствующим значениям второй: $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, ..., $a_n=b_n$, ..., то предел первой величины, конечно, если он существует, равен пределу второй», или короче: «Если две переменные равны, то равны и их пределы».

Предложение (§ 229) о пределе возрастающей числовой последовательности можно высказать так: *если переменная величина a_n возрастает с возрастанием номера n и в то же время остается меньше некоторого постоянного числа, то эта переменная величина имеет предел.*

Длина окружности

Понятие о пределе даст возможность точно определить, что мы подразумеваем под длиной окружности. Предварительно докажем следующие леммы.

232. Лемма 1. *Выпуклая ломаная (ABCD, рис. 232) меньше всякой другой ломаной (AEFGD), объемлющей первую.*

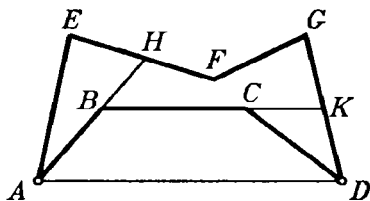


Рис. 232.

Выражения «объемлющая ломаная» имеют следующий смысл. Пусть две ломаные (как те, которые изображены у нас на рисунке) имеют одни и те же концы A и D и расположены таким образом, что одна ломаная (ABCD) вся лежит внутри многоугольника, образованного

другой ломаной и отрезком AD , соединяющим концы A и D ; тогда внешняя ломаная называется объемлющей, а внутренняя ломаная — объемлемой.

Предстоит доказать, что объемлемая ломаная ABCD (если она выпуклая) короче всякой объемлющей линии AEFGD (все равно — выпуклой или невыпуклой), т. е. что

$$AB+BC+CD < AE+EF+FG+GD.$$

Продолжим стороны выпуклой ломаной так, как указано на рисунке. Тогда, приняв во внимание, что отрезок пря-

мой меньше всякой ломаной, соединяющей концы отрезка, мы можем написать следующие неравенства:

$$AB+BH < AE+EH;$$

$$BC+CK < BH+HF+FG+GK;$$

$$CD < CK+KD.$$

Сложим почленно все эти неравенства и затем от обеих частей полученного неравенства отнимем вспомогательные отрезки BH и CK ; далее, заменив сумму $EH+HF$ отрезком EF и сумму $GK+KD$ отрезком GD , получим то неравенство, которое требовалось доказать.

Замечание. Если бы объемлемая линия не была выпуклой (рис. 233), то изложенное доказательство нельзя было бы применить. В этом случае объемлемая ломаная может оказаться и больше объемлющей.



Рис. 233.

233. Лемма 2. *Периметр выпуклого многоугольника (ABCD) меньше периметра всякого другого многоугольника (MNPQRL), объемлющего первый (рис. 234).*

Требуется доказать, что

$$AB+BC+CD+DA < LM+MN+NP+PQ+QR+RL.$$

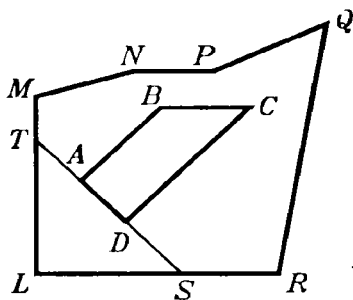


Рис. 234.

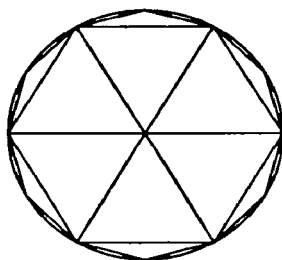


Рис. 235.

Продолжив в обоих направлениях одну какую-нибудь сторону, например AD , выпуклого многоугольника, применим к ломаным линиям $ABCD$ и $ATMNPQRSD$, соединяющим точки A и D , лемму предыдущего параграфа; получим неравенство:

$$AB+BC+CD < AT+TM+MN+NP+PQ+QR+RS+SD.$$

С другой стороны, так как отрезок ST меньше ломаной SLT , то можем написать:

$$TA+AD+DS < TL+LS.$$

Сложим почленно эти два неравенства и отнимем от обеих частей вспомогательные отрезки AT и DS ; далее, заменив сумму $TL+TM$ отрезком LM и сумму $LS+RS$ отрезком LR , получим то, что требовалось доказать.

234. Определение длины окружности. Впишем в данную окружность (рис. 235) правильный многоугольник, например шестиугольник, и на какой-нибудь прямой MN (рис. 236) отложим отрезок OP_1 , равный периметру этого

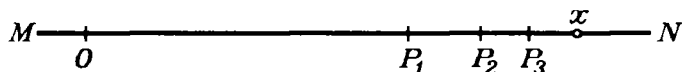


Рис. 236.

шестиугольника (на нашем рисунке этот периметр изображен по недостатку свободного места в уменьшенном виде). Удвоим теперь число сторон вписанного шестиугольника, т. е. вместо шестиугольника возьмем правильный вписанный 12-угольник. Найдем также его периметр и отложим его на той же прямой MN от той же точки O ; пусть тогда получится отрезок OP_2 , который должен быть больше OP_1 , так как вместо каждой стороны шестиугольника мы теперь берем ломаную (из двух сторон 12-угольника), которая длиннее прямой. Удвоим снова число сторон вписанного 12-угольника, т. е. возьмем теперь правильный 24-угольник (на рисунке он не указан), найдем его периметр и отложим его на MN от той же точки O ; мы получим тогда отрезок OP_3 , который будет больше OP_2 по той же причине, по какой OP_2 больше OP_1 .

Вообразим, что такой процесс удвоения и откладывания периметров продолжается все далее и далее. Тогда мы получим неограниченную последовательность периметров $OP_1, OP_2, OP_3, \dots$, которая является возрастающей последовательностью. Однако возрастание это не может быть неограниченным, так как периметр всякого вписанного многоугольника (выпуклого), каково бы ни было число его сторон, всегда остается меньше периметра любого описанного многоугольника (как его объемлющего). Вследствие этого полученная последовательность периметров правильных вписанных многоугольников имеет определенный предел (§ 229). Этот предел и

принимают за длину окружности. Таким образом, мы принимаем следующее определение: *за длину окружности принимается тот предел, к которому стремится (приближается) переменный периметр правильного многоугольника, вписанного в эту окружность, когда число сторон его неограниченно удваивается.*

З а м е ч а н и е. Можно доказать (мы опускаем это доказательство), что предел этот не зависит от того, с какого многоугольника мы начинаем удвоение. Более того, можно доказать, что если даже вписанные многоугольники и не будут правильными, все же периметры их будут стремиться к тому же самому пределу, как и периметры правильных многоугольников, лишь бы только стороны их неограниченно уменьшались (и, следовательно, число сторон их неограниченно увеличивалось) путем ли удвоения, как мы это предполагали для правильных многоугольников, или по какому-нибудь иному закону (мы опускаем это доказательство).

Таким образом, для каждой окружности существует свой единственный предел, к которому стремится периметр вписанного выпуклого многоугольника, когда стороны его неограниченно уменьшаются; предел этот и принимается за длину окружности.

Равным образом за длину какой-нибудь дуги окружности AB (рис. 237) принимается предел, к которому стремится переменный периметр ломаной линии, вписанной в эту дугу и имеющей с ней одни и те же концы, когда число сторон ломаной неограниченно удваивается.

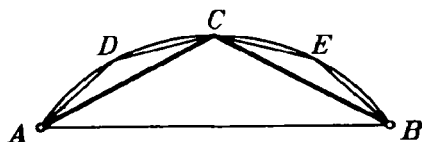


Рис. 237.

235. Допущения. Для простоты изложения мы примем без доказательства следующие, почти очевидные, предложения:

Длина дуги окружности: 1) больше стягивающей ее хорды, но 2) меньше периметра всякой ломаной линии, описанной около этой дуги и имеющей с ней одни и те же концы (рис. 238).

236. Доказательство этих предложений.

1) Пусть ACB (рис. 237) — дуга окружности и AB — стягивающая ее хорда; требуется доказать, что дуга больше этой хорды.

Предположим, что в дугу мы вписываем правильные ломаные таким образом: первая ломаная пусть будет составлена из двух хорд AC и CB ; вторую ломаную получим путем удвоения числа сторон первой ломаной; это будет ломаная $ADCEB$, состоящая из четырех хорд; третью ломаную получим удвоением числа сторон второй ломаной: она будет состоять из восьми хорд. Вообразим, что этот процесс удвоения продолжается неограниченно. Тогда с каждым удвоением периметр ломаной будет все возрастать; например:

$$AD+DC+CE+EB > AC+CB,$$

так как

$$AD+DC > AC \text{ и } CE+EB > CB.$$

Вследствие этого предел, к которому стремится этот периметр, должен быть больше периметра первой ломаной, т. е. больше суммы $AC+CB$, и, значит, должен быть и подавно больше хорды AB . Но предел этот принимается за длину дуги ACB , значит, эта дуга больше хорды AB .

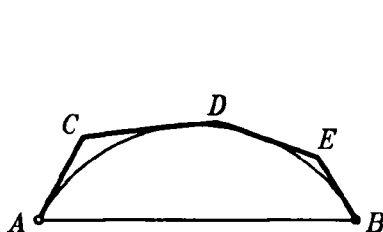


Рис. 238.

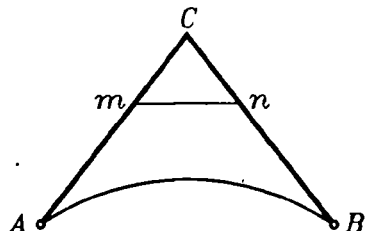


Рис. 239.

2) Пусть около дуги описана какая-нибудь ломаная линия (правильная или неправильная — все равно) (рис. 238). Если концы ломаной совпадают с концами дуги, то эту дугу можно рассматривать как сумму нескольких дуг, из которых каждая объемлется ломаной, состоящей только из двух отрезков прямой. Пусть одна из таких частей будет дуга AB (рис. 239). Докажем, что длина этой дуги меньше суммы $AC+CB$, которую мы для краткости обозначим одной буквой S . Для доказательства возьмем вспомогательную ломаную $AmlB$, которая получится, если мы срежем угол C каким-нибудь отрезком прямой ml , не пересекающим дугу AB (что всегда возможно, если ломаная описана, т. е. составлена из касательных). Обозначим длину этой вспомогательной ломаной $AmlB$ буквой S_1 . Так как $ml < mC+Cn$, то $S_1 < S$.

Докажем теперь, что предел, к которому стремится переменный периметр правильной ломаной, вписанной в дугу AB , при неограниченном удвоении числа сторон ломаной, не может быть больше S_1 . Обозначим этот предел буквой L и допустим, что $L > S_1$. Так как переменный периметр приближается к своему пределу L как угодно близко, то разность между L и этим периметром может сделаться меньше разности $L-S_1$; тогда, значит, периметр вписанной ломаной сделается больше S_1 . Но это невозможно, так как всякая выпуклая ломаная линия, вписанная в дугу AB , есть объемлемая по отношению к объемлющей ломаной $AmlB$ и потому она меньше S_1 . Следовательно, нельзя допустить, что $L > S_1$. Но тогда L должно быть меньше S_1 , или в крайнем случае равно S_1 . Но так как $S_1 < S$, то и в этом и в другом случаях должно быть: $L < S$, что и требуется доказать.

237. Нахождение длины окружности. Для этой цели можно пользоваться формулой удвоения, которую мы вывели раньше (§ 224), т. е. формулой:

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Если радиус R примем за 1, то формула эта примет более простой вид:

$$a_{2n}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Обозначая, по принятому, через a_n сторону правильного вписанного многоугольника, имеющего n сторон, будем иметь: $a_6 = R = 1$.

Применяя формулу удвоения, находим:

$$a_{12}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2 - \sqrt{3};$$

$$a_{24}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{12}^2}{4}}; \quad a_{48}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{24}^2}{4}} \quad \text{и т. д.}$$

Положим, что мы прекратили удвоение на 96-угольнике. Чтобы получить его периметр, надо сторону умножить на 96. Этот периметр можно принять за приближенное значение длины окружности. Обозначив его через p_{96} и выполнив вычисления, найдем:

$$p_{96} = 6,2820638...$$

При радиусе, равном R , получим:

$$p_{96} = R \cdot 6,2820638..., \text{ или } p_{96} = 2R \cdot 3,1410319...$$

Обозначая длину окружности буквой C , мы получим для нее приближенную формулу:

$$C = 2R \cdot 3,1410319...$$

Если бы мы прекратили процесс удвоения на 192-угольнике, то получили бы для длины окружности более точное значение, именно:

$$C = 2R \cdot 3,14145247...$$

Продолжая процесс удвоения, можно получать для длины окружности все более и более точные значения.

238. Отношение длины окружности к диаметру. Рассматривая процесс нахождения длины окружности, можно заметить, что число, на которое нужно умножить диаметр, чтобы получить длину окружности, не зависит от величины самого диаметра, так что если мы нашли, что длина какой-нибудь окружности равна ее диаметру, умноженному на некоторое число, то и длина всякой другой окружности будет равна ее диаметру, умноженному на то же самое число.

В самом деле, возьмем две окружности: одну радиуса R , другую радиуса r . Длину первой окружности обозначим через C , длину второй — через c . Впишем в каждую из них правильный многоугольник с одним и тем же числом сторон и будем удваивать число сторон каждого из этих многоугольников.

Обозначим через P_n переменный периметр правильного многоугольника, вписанного в первую окружность, и через p_n переменный периметр правильного многоугольника с тем же числом сторон, вписанного во вторую окружность.

В силу теорем, доказанных в § 218, мы можем написать:

$$\frac{P_n}{R} = \frac{p_n}{r}, \text{ или } \frac{P_n}{2R} = \frac{p_n}{2r}.$$

Переменный периметр P_n имеет пределом длину C первой окружности. Переменный периметр p_n имеет пределом длину c второй окружности. А потому из равенства $\frac{P_n}{2R} = \frac{p_n}{2r}$ вытекает $\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r}$ (§ 228 и 231). Таким образом, мы можем сказать, что отношение длины окружности к ее диаметру есть число, постоянное для всех окружностей.

Это постоянное число принято обозначать греческой буквой π ¹.

Мы можем, таким образом, для длины C окружности написать такую формулу:

$$C = 2R \cdot \pi, \text{ или } C = 2\pi R.$$

Доказано, что число π является числом **иррациональным**, и, значит, оно не может быть выражено точно никаким рациональным числом. Но его приближенные значения можно находить различными способами с какой угодно точностью. Приняв периметр вписанного 96-угольника за приближенную длину окружности, мы получим для π приближенное значение 3,14 с недостатком и с точностью до 0,01. Эта точность для практических целей почти всегда достаточна. В случаях особенной точности можно довольствоваться таким приближенным значением (с избытком): $\pi = 3,1416$.

Ученые, пользуясь усовершенствованными способами, вычислили π с точностью, далеко превосходящей всякие

¹ Обозначение это введено, по всей вероятности, в XVII столетии. Буква π (пи) есть начальная буква греческого слова *περιφέρεια* (окружность).

практические требования (так, английский математик Шенкс в 1873 г. нашел 707 десятичных знаков числа π)¹.

Полезно заметить, что еще в III веке до начала нашей эры знаменитый сиракузский геометр Архимед нашел для π очень простое число $\frac{22}{7}$, т. е. $3\frac{1}{7}$. Это число несколько более π и разнится от него менее чем на 2 тысячных.

При решении геометрических задач часто встречается число, обратное числу π , т. е. равное дроби $\frac{1}{\pi}$. Полезно запомнить несколько цифр этого числа:

$$\frac{1}{\pi} = 0,3183098\dots$$

239. Длина дуги, содержащей n градусов. Длина окружности есть $2\pi R$, значит, длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$; следовательно, длина s дуги, содержащей n° , выразится так:

$$s = \frac{\pi R n}{180}.$$

Если дуга выражена в минутах (n') или в секундах (n''), то длина ее определяется соответственно формулами:

$$s = \frac{\pi R n}{180 \cdot 60} \quad \text{или} \quad s = \frac{\pi R n}{180 \cdot 60 \cdot 60},$$

где n — число минут или секунд.

240. Задача. Вычислить с точностью до 1 мм радиус такой окружности, дуга которой, содержащая $81^\circ 21' 36''$, равна 0,452 м.

Обратив $81^\circ 21' 36''$ в секунды, получим число 292 896.

¹ Для запоминания довольно длинного ряда цифр, выражающих число π , можно пользоваться следующим французским двустишием:

Que j'aime à faire apprendre

Un nombre utile aux hommes!

или следующим русским (придуманным покойным преподавателем средней школы Шенроком):

Кто и шутя и скоро пожелает(ъ)

Пи узнать число уж(ъ) знает(ъ)!

Если выписать в ряд числа букв, заключающихся в каждом слове этих фраз (написанных по старой орфографии), то получим для π приближенное число (с избытком), 3,1415926536, верное до одной половины десятибиллионной.

$$\text{Из уравнения } 0,452 = \frac{\pi R \cdot 292\,896}{180 \cdot 60 \cdot 60}$$

находим:

$$R = \frac{0,452 \cdot 180 \cdot 60 \cdot 60}{292\,896 \pi} = \frac{1}{\pi} \approx 0,318 \text{ (м)}.$$

241. Задача. Определить число градусов дуги, длина которой равна радиусу.

Заменив в формуле, определяющей длину дуги в n° , величину z на R , получим уравнение:

$$R = \frac{\pi R n}{180}, \text{ или } 1 = \frac{\pi n}{180},$$

$$\text{откуда } n^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = 180^\circ \cdot \frac{1}{\pi} \approx 180^\circ \cdot 0,3183098 \approx 57^\circ,295764 \approx \\ \approx 57^\circ 17' 44'',8.$$

Заметим, что дуга, равная радиусу, называется **радианом**.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что в двух кругах отношение центральных углов, соответствующих дугам, имеющим одинаковую длину, равно обратному отношению радиусов.

2. На окружности взята точка A и через нее проведены: диаметр AB , сторона правильного вписанного шестиугольника AC и касательная MN . Из центра O опущен на AC перпендикуляр и продолжен до пересечения с касательной в точке D . От этой точки отложен по касательной (через точку A) отрезок DE , равный трем радиусам. Точка E соединена с концом диаметра B . Определить, как велика погрешность, если прямую BE возьмем за длину полуокружности.

3. На диаметре данной полуокружности построены две равные полуокружности, и в ту часть плоскости, которая заключена между тремя полуокружностями, вписан круг. Доказать, что диаметр этого круга относится к диаметру равных полуокружностей, как 2 : 3.

4. Вычислить в градусах, минутах и секундах дугу, равную стороне квадрата, вписанного в эту окружность.

5. Вычислить длину 1° земного экватора, принимая радиус Земли равным 6400 км.

ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

1. ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

242. Понятие о площади. Каждый из нас имеет некоторое представление из повседневной жизни о площади.

Мы займемся уточнением понятия о площади фигуры и установлением способов ее измерения.

243. Основные допущения о площадях. Величина части плоскости, ограниченной многоугольником или какой-нибудь другой плоской замкнутой фигурой, называется площадью этой фигуры.

Мы ставим перед собой задачу найти для этой величины выражение в виде некоторого числа, т. е. задачу найти число, измеряющее площадь.

При этом мы требуем, чтобы соотношение между площадями фигур и числами, их измеряющими, удовлетворяло следующим условиям:

1) числа, измеряющие площади двух равных фигур, должны быть равны между собой;

2) если данная фигура разбита на несколько частей (M , N , P , рис. 240), составляющих каждая замкнутую фигуру, то число, измеряющее площадь всей фигуры, должно быть равно сумме чисел, измеряющих площади отдельных ее частей.

Замечание. Относительно последнего требования необходимо сделать следующее важное замечание. Площади мы измеряем положительными числами.

Но сумма двух положительных чисел всегда больше каждого из слагаемых. Поэтому, чтобы можно было принять условие 2-е, необходимо, чтобы и площади фигур обладали соответствующим свойством. Поясним это. Положим, что, разбив данную фигуру на несколько частей, мы будем переставлять

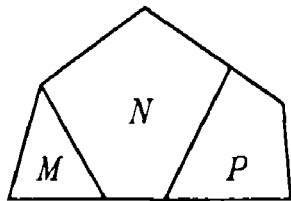


Рис. 240.

эти части и получать таким образом новые фигуры (подобно тому, как на рисунке 241 перемещены части A и B). Спрашивается: нельзя ли путем этих перестановок получить такую фигуру, которая могла бы целиком уместиться внутри первоначальной фигуры? Если бы это оказалось возможным, то получились бы две фигуры, лежащие одна внутри другой, причем числа, измеряющие их площади, в силу условия 2-го, были бы равны между собой.

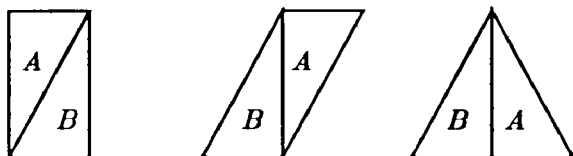


Рис. 241.

Таким образом, число, измеряющее площадь всей фигуры, оказалось бы равным числу, измеряющему площадь лишь некоторой части этой фигуры, т. е. сумма была бы равна одному из слагаемых, что невозможно для положительных чисел. Следовательно, в этом случае условие 2-е не могло бы быть принято. Впервые обратил внимание на этот вопрос итальянский математик Децольт (1881). Невозможность указанной выше перестановки частей фигуры принималась вначале как некоторый постулат, но позднее эта невозможность была строго доказана Шуром, Киллингом, Шатуновским и Гильбертом. Это свойство площадей фигур и делает возможным принятие условия 2-го.

Фигуры, имеющие равные площади, принято называть **равновеликими**. Конечно, равные фигуры всегда и равновелики, но равновеликие фигуры могут быть неравными (как те, которые изображены на рисунке 241).

244. Понятие об измерении площади. Для измерения площади данной фигуры прежде всего выбирают единицу площади. За такую единицу берут площадь квадрата, у которого сторона равна линейной единице, например одному метру, одному сантиметру и т. п. Для фигур простейшего типа можно получить меру площади следующим образом. Накладываем единицу площади на измеряемую площадь столько раз, сколько это возможно. Это можно сделать для небольших площадей, которые можно начертить на бумаге, при помощи прозрачной миллиметровой бумаги, разделенной равноотстоящими параллельными прямыми на маленькие квадраты, принятые за единицу площади. Допустим, что на фигуру, площадь которой надо измерить, наложена такая сеть квадратов. Тогда, если контур данной фигуры представляет собой ломаную линию (рис. 242), стороны которой совпадают с частями прямых линий, образующих сеть квадратов, то число квадратов, лежащих внутри фигуры, составит точную меру измеряемой площади.

В действительности измерение площадей производится не путем наложения единицы площади или ее доли, а косвенным путем, посредством измерения некоторых линий фигуры. Как это делается, мы увидим из следующих параграфов.

245. Основание и высота. Условимся одну из сторон треугольника или параллелограмма называть **основанием** этих фигур, а перпендикуляр, опущенный на эту сторону из вершины треугольника или из какой-нибудь точки противоположной стороны параллелограмма, будем называть **высотой**.

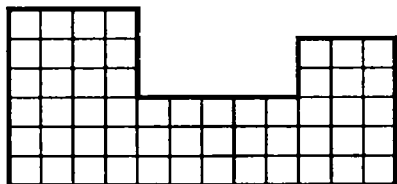


Рис. 242.

В прямоугольнике за высоту можно взять сторону, перпендикулярную к той, которая принята за основание.

В трапеции основаниями называют обе параллельные стороны, а высотой — общий перпендикуляр между ними.

Основание и высота прямоугольника называются его измерениями.

246. Теорема. *Площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту.*

Это краткое предложение надо понимать так: число, выражающее площадь прямоугольника в квадратных единицах, равно произведению чисел, выражающих основание и высоту его в соответствующих линейных единицах.

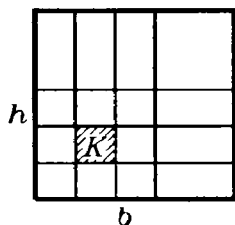


Рис. 243.

При доказательстве могут представиться три случая:

1) Длины основания и высоты (измеренных одной и той же единицей) выражаются целыми числами.

Пусть у данного прямоугольника (рис. 243) основание равно целому числу b линейных единиц, а высота — целому числу h тех же единиц. Разделим основание на b и высоту на h равных частей, проведем через точки деления ряд прямых, параллельных высоте, и другой ряд прямых, параллельных основанию. От взаимного пересечения этих прямых образуются некоторые четырехугольники. Возьмем какой-нибудь один из них, например четырехугольник K (покрытый на чертеже штрихами). Так как стороны

этого четырехугольника, по построению, параллельны соответствующим сторонам данного прямоугольника, то все углы его прямые; значит, четырехугольник K есть прямоугольник. С другой стороны, каждая сторона этого прямоугольника равна расстоянию между соседними параллельными прямыми, т. е. равна одной и той же линейной единице. Значит, прямоугольник K представляет собой квадрат, а именно: ту квадратную единицу, которая соответствует взятой линейной единице (если, например, основание и высота были измерены линейными сантиметрами, то квадрат K есть квадратный сантиметр). Так как сказанное об одном четырехугольнике справедливо и для всякого другого, то, значит, проведением указанных параллельных прямых мы разбиваем всю площадь данного прямоугольника на квадратные единицы. Найдем их число. Очевидно, что ряд прямых, параллельных основанию, разделяет прямоугольник на столько равных горизонтальных полос, сколько в высоте содержится линейных единиц, т. е. на h равных полос. С другой стороны, ряд прямых, параллельных высоте, разбивает каждую горизонтальную полосу на столько квадратных единиц, сколько в основании содержится линейных единиц, т. е. на b квадратных единиц. Значит, всех квадратных единиц окажется $b \cdot h$. Таким образом, площадь прямоугольника $= bh$,

т. е. она равна произведению основания на высоту.

2) Длины основания и высоты (измеренных одной и той же единицей) выражаются дробными числами.

Пусть, например, у данного прямоугольника:

$$\text{основание} = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \text{ линейных единиц,}$$

$$\text{высота} = 4\frac{3}{5} = \frac{23}{5} \text{ той же единицы.}$$

Приведя дроби к одинаковому знаменателю, получим:

$$\text{основание} = \frac{35}{10}; \text{ высота} = \frac{46}{10}.$$

Примем $\frac{1}{10}$ долю линейной единицы за новую единицу

длины. Тогда мы можем сказать, что основание содержит 35 этих новых единиц, а высота 46 тех же единиц. Значит, по доказанному в случае 1-м площадь прямоугольника равна $35 \cdot 46$ таких квадратных единиц, которые соответствуют новой единице длины. Но эта квадратная единица составляет

$\frac{1}{100}$ часть квадратной единицы, соответствующей прежней линейной единице; значит, площадь прямоугольника в прежних квадратных единицах равна:

$$\frac{35 \cdot 46}{100} = \frac{35}{10} \cdot \frac{46}{10} = 3 \frac{1}{2} \cdot 4 \frac{3}{5} \text{ (квадратных единиц).}$$

3) Основание и высота (или только одно из этих измерений) несоизмеримы с единицей длины, и, следовательно, их длины выражаются иррациональными числами.

В этом случае можно довольствоваться приближенным результатом измерения площади с желаемой степенью точности.

Но можно и в этом случае найти точную меру площади прямоугольника. Пусть длина основания AB прямоугольника $ABCD$ (рис. 244) выражается иррациональным числом α , а длина высоты AD — иррациональным числом β . Каждое из этих чисел может быть представлено в виде бесконечной непериодической десятичной дроби (§ 150). Возьмем приближенные значения этих чисел в виде десятичных дробей с n десятичными знаками: сначала с недостатком, затем с избытком.

Приближенные значения с недостатком обозначим через α_n (для первого числа) и β_n (для второго числа), а приближенные значения с избытком соответственно через α'_n и β'_n . Отложим на основании AB от точки A сначала отрезок AB_1 , численная величина которого равна α_n , затем отрезок AB_2 , численная величина которого равна α'_n . Очевидно, $AB_1 < AB$ и $AB_2 > AB$. Отложим, далее, на высоте AD от точки A отрезки AD_1 и AD_2 , численные величины которых равны соответственно β_n и β'_n . Очевидно, $AD_1 < AD$ и $AD_2 > AD$.

Построим два вспомогательных прямоугольника $AB_1C_1D_1$ и $AB_2C_2D_2$. У каждого из них основание и высота выражаются рациональными числами:

$$AB_1 = \alpha_n, AB_2 = \alpha'_n, AD_1 = \beta_n, AD_2 = \beta'_n.$$

Поэтому согласно доказанному в случае 2-м площадь $AB_1C_1D_1 = \alpha_n \beta_n$,

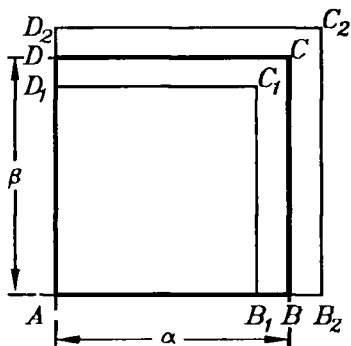


Рис. 244.

этого четырехугольника, по построению, параллельны соответствующим сторонам данного прямоугольника, то все углы его прямые; значит, четырехугольник K есть прямоугольник. С другой стороны, каждая сторона этого прямоугольника равна расстоянию между соседними параллельными прямыми, т. е. равна одной и той же линейной единице. Значит, прямоугольник K представляет собой квадрат, а именно: ту квадратную единицу, которая соответствует взятой линейной единице (если, например, основание и высота были измерены линейными сантиметрами, то квадрат K есть квадратный сантиметр). Так как сказанное об одном четырехугольнике справедливо и для всякого другого, то, значит, проведением указанных параллельных прямых мы разбиваем всю площадь данного прямоугольника на квадратные единицы. Найдем их число. Очевидно, что ряд прямых, параллельных основанию, разделяет прямоугольник на столько равных горизонтальных полос, сколько в высоте содержится линейных единиц, т. е. на h равных полос. С другой стороны, ряд прямых, параллельных высоте, разбивает каждую горизонтальную полосу на столько квадратных единиц, сколько в основании содержится линейных единиц, т. е. на b квадратных единиц. Значит, всех квадратных единиц окажется $b \cdot h$. Таким образом, площадь прямоугольника $= bh$,

т. е. она равна произведению основания на высоту.

2) Длины основания и высоты (измеренных одной и той же единицей) выражаются дробными числами.

Пусть, например, у данного прямоугольника:

$$\text{основание} = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \text{ линейных единиц,}$$

$$\text{высота} = 4\frac{3}{5} = \frac{23}{5} \text{ той же единицы.}$$

Приведя дроби к одинаковому знаменателю, получим:

$$\text{основание} = \frac{35}{10}; \text{ высота} = \frac{46}{10}.$$

Примем $\frac{1}{10}$ долю линейной единицы за новую единицу длины. Тогда мы можем сказать, что основание содержит 35 этих новых единиц, а высота 46 тех же единиц. Значит, по доказанному в случае 1-м площадь прямоугольника равна $35 \cdot 46$ таких квадратных единиц, которые соответствуют новой единице длины. Но эта квадратная единица составляет

$\frac{1}{100}$ часть квадратной единицы, соответствующей прежней линейной единице; значит, площадь прямоугольника в прежних квадратных единицах равна:

$$\frac{35 \cdot 46}{100} = \frac{35}{10} \cdot \frac{46}{10} = 3 \frac{1}{2} \cdot 4 \frac{3}{5} \text{ (квадратных единиц).}$$

3) Основание и высота (или только одно из этих измерений) несоизмеримы с единицей длины, и, следовательно, их длины выражаются иррациональными числами.

В этом случае можно довольствоваться приближенным результатом измерения площади с желаемой степенью точности.

Но можно и в этом случае найти точную меру площади прямоугольника. Пусть длина основания AB прямоугольника $ABCD$ (рис. 244) выражается иррациональным числом α , а длина высоты AD — иррациональным числом β . Каждое из этих чисел может быть представлено в виде бесконечной непериодической десятичной дроби (§ 150). Возьмем приближенные значения этих чисел в виде десятичных дробей с n десятичными знаками: сначала с недостатком, затем с избытком.

Приближенные значения с недостатком обозначим через α_n (для первого числа) и β_n (для второго числа), а приближенные значения с избытком соответственно через α'_n и β'_n . Отложим на основании AB от точки A сначала отрезок AB_1 , численная величина которого равна α_n , затем отрезок AB_2 , численная величина которого равна α'_n . Очевидно, $AB_1 < AB$ и $AB_2 > AB$. Отложим, далее, на высоте AD от точки A отрезки AD_1 и AD_2 , численные величины которых равны соответственно β_n и β'_n . Очевидно, $AD_1 < AD$ и $AD_2 > AD$.

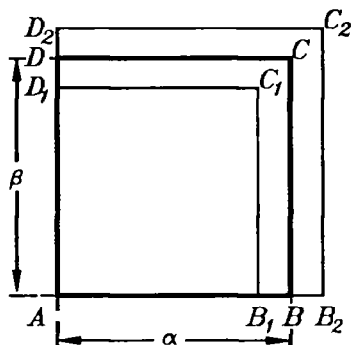


Рис. 244.

Построим два вспомогательных прямоугольника $AB_1C_1D_1$ и $AB_2C_2D_2$. У каждого из них основание и высота выражаются рациональными числами:

$$AB_1 = \alpha_n, AB_2 = \alpha'_n, AD_1 = \beta_n, AD_2 = \beta'_n.$$

Поэтому согласно доказанному в случае 2-м площадь $AB_1C_1D_1 = \alpha_n \beta_n$,

площадь $AB_2C_2D_2 = \alpha'_n \beta'_n$.

Будем теперь увеличивать n неограниченно. В таком случае α_n и α'_n будут иметь пределом иррациональное число α , а числа β_n и β'_n будут иметь пределом иррациональное число β . Произведения же $\alpha_n \beta_n$ и $\alpha'_n \beta'_n$, как известно из алгебры, имеют общий предел, называемый произведением чисел α и β (§ 154).

Этот общий предел произведений $\alpha_n \beta_n$ и $\alpha'_n \beta'_n$, т. е. произведение $\alpha \beta$, и принимают за меру площади прямоугольника $ABCD$. Легко непосредственно убедиться, что эта мера удовлетворяет тем условиям, которым должно удовлетворять число, измеряющее площадь (§ 243), именно: 1) числа, измеряющие площади равных прямоугольников, равны; 2) если прямоугольник разбить на несколько прямоугольников, то число, измеряющее площадь всего прямоугольника, будет равно сумме чисел, измеряющих площади составляющих прямоугольников. Таким образом, и в этом случае площадь прямоугольника равна произведению основания на высоту.

247. Теорема. *Площадь параллелограмма ($ABCD$, рис. 245 и 246) равна произведению основания на высоту.*

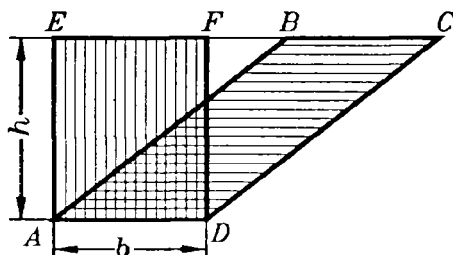


Рис. 245.

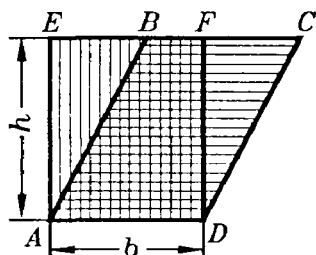


Рис. 246.

На основании AD (на том и другом чертежах) построим прямоугольник $AEFD$, у которого сторона EF составляет продолжение стороны BC .

При этом могут представиться два случая:

1) сторона BC лежит вне стороны EF и 2) сторона BC частью совпадает с EF (первый случай изображен на рисунке 245, второй — на рисунке 246). Докажем, что и в том и в другом случаях

площадь $ABCD =$ площади $AEFD$.

Если параллелограмм дополним треугольником AEB , а прямоугольник дополним треугольником DFC , то мы получим одну и ту же трапецию $AECD$. Так как дополняющие

треугольники равны (они имеют по две стороны и углу, заключенному между ними, соответственно равными), то параллелограмм и прямоугольник должны быть равновелики. Но площадь $AEFD = bh$; следовательно, и площадь $ABCD = bh$, причем b можно рассматривать как основание параллелограмма и h — как его высоту.

248. Теорема. *Площадь треугольника (ABC , рис. 247) равна половине произведения основания на высоту.*

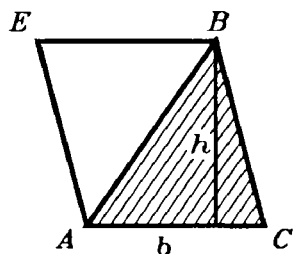


Рис. 247.

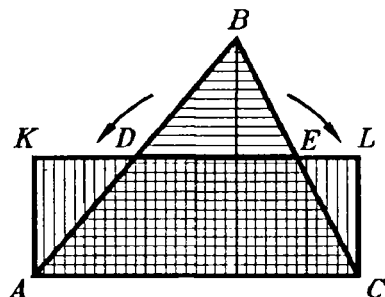


Рис. 248.

Проведем $BE \parallel AC$ и $AE \parallel BC$. Тогда получим параллелограмм $AEBC$, площадь которого, по доказанному, равна bh . Но площадь $\triangle ABC$ составляет половину площади $AEBC$; следовательно,

$$\text{площадь } \triangle ABC = \frac{1}{2} b \cdot h.$$

Замечание. Легко убедиться, что всякий треугольник разлагается на части, перемещением которых можно образовать прямоугольник, имеющий одинаковое с треугольником основание и высоту, вдвое меньшую высоты треугольника (рис. 248).

249. Следствия. 1) *Треугольники с равными основаниями и равными высотами равновелики.*

Если, например, вершину B $\triangle ABC$ (рис. 249) будем перемещать по прямой, параллельной основанию AC , а основание оставим то же самое, то площадь треугольника не будет изменяться.

2) *Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов*, потому что один катет можно взять за основание, а другой — за высоту.

3) *Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.* Действительно, если $ABCD$ (рис. 250) есть ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны. Поэтому

$$\text{площадь } \triangle ABC = \frac{1}{2} AC \cdot OB,$$

$$\text{площадь } \triangle ACD = \frac{1}{2} AC \cdot OD,$$

$$\text{площадь } ABCD = \frac{1}{2} AC \cdot (OB + OD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

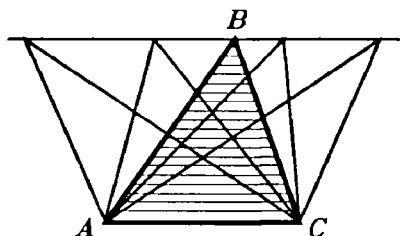


Рис. 249.

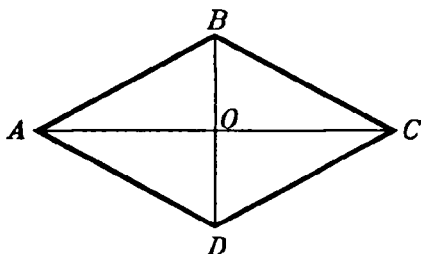


Рис. 250.

4) *Площади двух треугольников относятся, как произведения их основания на высоты (множитель $\frac{1}{2}$ сокращается).*

250. Теорема. *Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.*

Проведя в трапеции $ABCD$ (рис. 251) диагональ AC , мы можем рассматривать ее площадь как сумму площадей двух треугольников CAD и ABC . Поэтому:

$$\begin{aligned} \text{площадь трапеции } ABCD &= \frac{1}{2} AD \cdot h + \frac{1}{2} BC \cdot h = \\ &= \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot h. \end{aligned}$$

251. Следствие. Если MN (рис. 252) есть средняя линия трапеции, то, как известно,

$$MN = \frac{1}{2} (AD + BC).$$

Поэтому площадь трапеции $ABCD = MN \cdot h$,

т. е. площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.

Это же можно видеть и непосредственно из рисунка 252.

252. Теорема. *Площадь всякого описанного многоугольника равна произведению периметра на половину радиуса.*

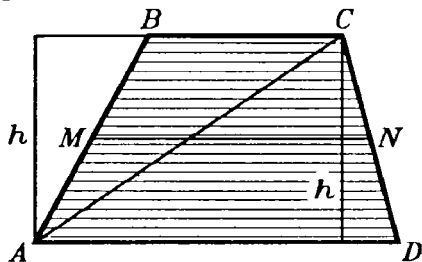


Рис. 251.

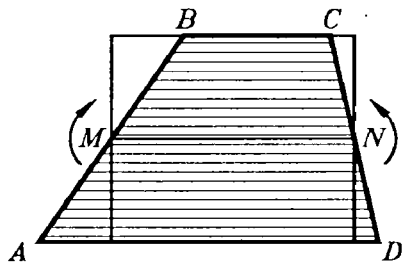


Рис. 252.

Соединив центр O (рис. 253) со всеми вершинами описанного многоугольника, мы разделим его на треугольники, в которых за основания можно взять стороны многоугольника, а за высоты — радиус круга.

Обозначив этот радиус через R , будем иметь:

площадь $\triangle AOB = AB \cdot \frac{1}{2} R$, площадь $\triangle BOC = BC \cdot \frac{1}{2} R$ и т. д.

Следовательно,

$$\text{площадь мн. } ABCDE = (AB + BC + CD + DE + EA) \cdot \frac{1}{2} R = P \cdot \frac{1}{2} R,$$

где буквой P обозначен периметр многоугольника.

Следствие. *Площадь правильного многоугольника равна произведению периметра на половину апофемы, потому что всякий правильный многоугольник можно рассматривать как описанный около круга, у которого радиус есть апофема.*

253. Площадь неправильного многоугольника. Для нахождения площади какого-нибудь неправильного многоугольника можно его разбить на треугольники (например, диагоналями), вычислить площадь каждого треугольника в отдельности и результаты сложить.

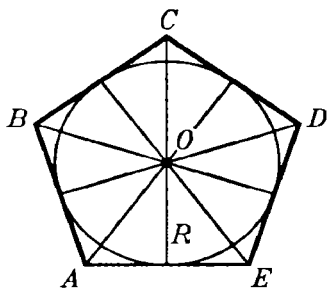


Рис. 253.

254. Задача. Построить треугольник, равновеликий данному многоугольнику ($ABCDE$, рис. 254).

Какой-нибудь диагональю AC отсечем от данного многоугольника $\triangle ABC$. Через ту вершину B этого треугольника, которая лежит против взятой диагонали, проведем прямую $MN \parallel AC$. Затем продолжим одну из сторон EA или DC , прилежащих к отсеченному треугольнику, до пересечения с прямой MN (на рисунке продолжена сторона EA). Точку пересечения F соединим прямой с C . Треугольники CBA и CFA рав-

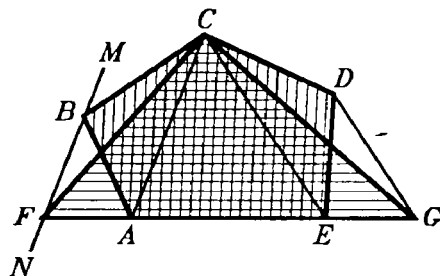


Рис. 254.

новелики, так как у них общее основание AC , а вершины B и F лежат на прямой, параллельной основанию. Если от данного многоугольника отделим $\triangle CBA$ и вместо него приложим равновеликий ему $\triangle CFA$, то величина площади не изменится; следовательно, данный многоугольник равновелик многоугольнику $FCDE$, у которо-

го, очевидно, число углов на единицу меньше, чем у данного многоугольника. Таким же приемом можно число углов полученного многоугольника уменьшить еще на единицу и продолжать такое последовательное уменьшение до тех пор, пока не получится треугольник (FCG на нашем рисунке).

255. Задача. Построить квадрат, равновеликий данному многоугольнику.

Сначала преобразовывают многоугольник в равновеликий треугольник, а затем этот треугольник — в квадрат. Пусть основание и высота треугольника b и h , а сторона искомого квадрата x . Тогда площадь первого равна $\frac{1}{2}bh$, а второго x^2 ; следовательно,

$$\frac{1}{2}bh = x^2, \text{ откуда } \frac{1}{2}b : x = x : h,$$

т. е. x есть средняя пропорциональная между $\frac{1}{2}b$ и h . Значит, сторону квадрата можно построить способом, указанным раньше (§ 190) для нахождения средней пропорциональной.

Замечание. Преобразование данного многоугольника в треугольник не всегда необходимо. Например, если речь идет о преобразовании в квадрат данной трапеции, то достаточно найти среднюю пропорциональную между высотой трапеции и ее средней линией и на полученном отрезке построить квадрат.

256. Задача. Вычислить площадь S треугольника, зная длины a , b и c его сторон.

Пусть высота $\triangle ABC$ (рис. 255), опущенная на сторону a , есть h_a . Тогда

$$S = \frac{1}{2} ah_a.$$

Чтобы найти высоту h_a , возьмем равенство (§ 194):

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac'$$

и определим из него отрезок c' :

$$c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Из $\triangle ABD$ находим:

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}.$$

Преобразуем подкоренное выражение так:

$$\begin{aligned} & (2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 = \\ & = (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2) = \\ & = ((a^2 + c^2 + 2ac) - b^2)(b^2 - (a^2 + c^2 - 2ac)) = \\ & = ((a + c)^2 - b^2)(b^2 - (a - c)^2) = \\ & = (a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}^1.$$

Если положим, что $a + b + c = 2p$, то

$$a + c - b = (a + b + c) - 2b = 2p - 2b = 2(p - b).$$

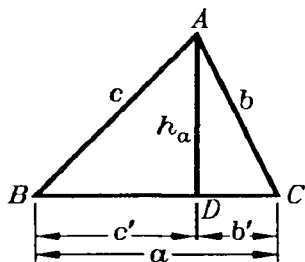


Рис. 255.

¹ Так как в треугольнике сумма любых двух сторон больше третьей, то все разности $a + b - c$, $a + c - b$ и $b + c - a$ — числа положительные.

Подобно этому

$$b+a-c=2(p-c);$$

$$b+c-a=2(p-a).$$

Тогда

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c)},$$

т. е.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Это выражение известно под названием **формулы Герона** (по имени математика Герона из Александрии, жившего приблизительно в III—II веках до начала нашей эры).

Частный случай. Площадь равностороннего треугольника со стороной a выражается следующей формулой:

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Теорема Пифагора и основанные на ней задачи

257. Теорема. *Сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе этого треугольника.*

Это предложение является другой формой теоремы Пифагора, доказанной ранее (§ 191): *квадрат числа, измеряющего длину гипотенузы, равен сумме квадратов чисел, измеряющих длины катетов.* Действительно, квадрат числа, измеряющего длину отрезка, и является мерой площади квадрата, построенного на этом отрезке. Поэтому теорема § 191 равносильна указанной теореме Пифагора.

Приведем другое доказательство теоремы Пифагора, основанное не на вычислении площадей, а на непосредственном их сравнении между собой.

Доказательство (Эвклида). Пусть ABC (рис. 256) — прямоугольный треугольник, а $BDEA$, $AFGC$ и $BCKH$ — квадраты, построенные на его катетах и гипотенузе; требуется доказать, что сумма площадей двух первых квадратов равна площади третьего квадрата.

Проведем $AM \perp BC$. Тогда квадрат $BCKH$ разделится на два прямоугольника. Докажем, что прямоугольник $BLMH$ равновелик квадрату $BDEA$, а прямоугольник $LCKM$ равновелик квадрату $AFGC$.

Проведем вспомогательные прямые DC и AN . Рассмотрим два треугольника, покрытые на чертеже штрихами.

$\triangle DCB$, имеющий основание BD , общее с квадратом $BDEA$, а высоту CN , равную высоте AB этого квадрата, равновелик половине квадрата.

$\triangle ABH$, имеющий основание BH , общее с прямоугольником $BLMH$, и высоту AP , равную высоте BL этого прямоугольника, равновелик половине его. Сравнивая эти два треугольника между собой, находим, что у них $BD=BA$ и $BC=BH$ (как стороны квадрата); сверх того $\angle DBC=\angle ABH$, так как каждый из этих углов

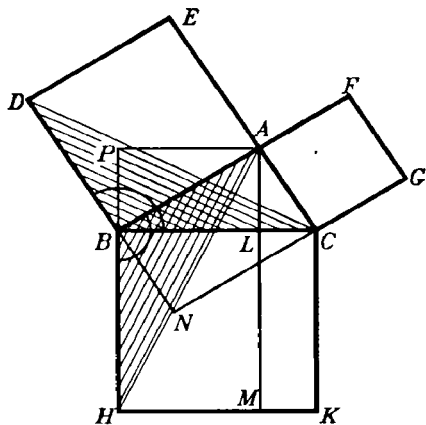


Рис. 256.

состоит из общей части — $\angle ABC$ и прямого угла. Значит, треугольники ABH и BDC равны. Отсюда следует, что прямоугольник $BLMN$ равновелик квадрату $BDEA$. Соединив G с B и A с K , мы совершенно так же докажем, что прямоугольник $LCKM$ равновелик квадрату $AFGC$. Отсюда следует, что квадрат $BCKH$ равновелик сумме квадратов $BDEA$ и $AFGC$.

258. Задачи. 1) Построить квадрат, площадь которого равна сумме площадей двух данных квадратов.

Строим прямоугольный треугольник, у которого катетами были бы стороны данных квадратов. Квадрат, построенный на гипотенузе этого треугольника, имеет площадь, равную сумме площадей данных квадратов.

2) Построить квадрат, площадь которого равна разности площадей двух данных квадратов.

Строим прямоугольный треугольник, у которого гипотенузой была бы сторона большего из данных квадратов, а катетом — сторона меньшего квадрата. Квадрат, построенный на другом катете этого треугольника, является искомым.

3) Построить квадрат, площадь которого относится к площади данного квадрата, как $m : n$.

На произвольной прямой (рис. 257) откладываем $AB=m$ и $BC=n$ и на AC , как на диаметре, описываем полуокружность. Из точки B восставляем перпендикуляр BD до пересечения с окружностью. Проведя хорды AD и DC , получим прямоугольный треугольник, у которого (§ 192):

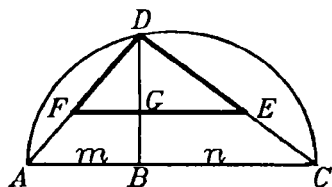


Рис. 257.

$$AD^2 : DC^2 = AB : BC = m : n.$$

На катете DC этого треугольника отложим отрезок DE , равный стороне данного квадрата, и проведем $EF \parallel CA^1$. Отрезок DF есть сторона искомого квадрата, потому что

$$\frac{DF}{DE} = \frac{AD}{DC}, \text{ откуда } \left(\frac{DF}{DE}\right)^2 = \left(\frac{AD}{DC}\right)^2;$$

следовательно,

$$DF^2 : E^2 = AD^2 : DC^2 = m : n.$$

Отношение площадей подобных фигур

259. Теорема. *Площади двух треугольников, имеющих по равному углу, относятся, как произведения сторон, заключающих эти углы.*

Пусть (рис. 258) в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 равны.

Проведя высоты BD и B_1D_1 , будем иметь:

$$\frac{\text{площадь } ABC}{\text{площадь } A_1B_1C_1} = \frac{AC \cdot BD}{A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{BD}{B_1D_1}.$$

Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ подобны ($\angle A = \angle A_1$ и $\angle D = \angle D_1$), поэтому отношение $BD : B_1D_1$ равно отношению $AB : A_1B_1$; заменив первое отношение вторым, получим:

$$\frac{\text{площадь } ABC}{\text{площадь } A_1B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC \cdot AB}{A_1C_1 \cdot A_1B_1}.$$

¹ Если сторона данного квадрата больше DC , то точки E и F будут лежать на продолжениях катетов DC и DA .

260. Теорема. *Площади подобных треугольников или многоугольников относятся, как квадраты сходственных сторон.*

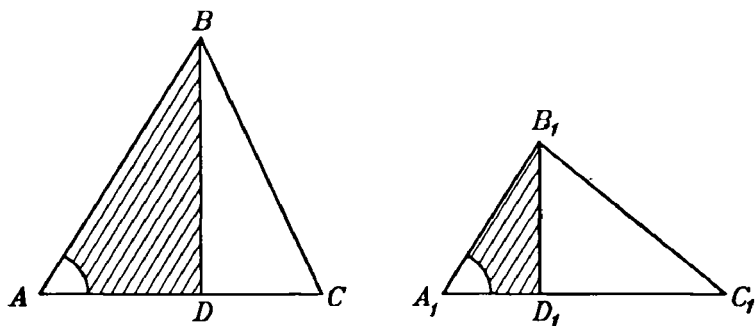


Рис. 258.

1) Если ABC и $A_1B_1C_1$ — два подобных треугольника, то углы одного равны соответственно углам другого; пусть $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $\angle C = \angle C_1$. Применим к ним предыдущую теорему:

$$\frac{\text{площадь } ABC}{\text{площадь } A_1B_1C_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1}. \quad (1)$$

Но из подобия треугольников следует:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}. \quad (2)$$

Поэтому в равенстве (1) мы можем каждое из отношений $\frac{AB}{A_1B_1}$ и $\frac{AC}{A_1C_1}$ заменить любым отношением ряда (2); следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\text{площадь } ABC}{\text{площадь } A_1B_1C_1} &= \left(\frac{AB}{A_1B_1} \right)^2 = \left(\frac{AC}{A_1C_1} \right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1} \right)^2 = \\ &= \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = \frac{AC^2}{A_1C_1^2} = \frac{BC^2}{B_1C_1^2}. \end{aligned}$$

2) Если $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 259) — два подобных многоугольника, то их можно, как мы видели (§ 171), разложить на одинаковое число подобных и одинаково расположенных треугольников. Пусть эти треугольники будут: AOB и $A_1O_1B_1$, BOC и $B_1O_1C_1$ и т. д. Согласно доказанному в первой части этой теоремы мы получим пропорции:

$$\frac{\text{площадь } AOC}{\text{площадь } A_1O_1C_1} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2; \frac{\text{площадь } BOC}{\text{площадь } B_1O_1C_1} = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 \text{ и т.д.}$$

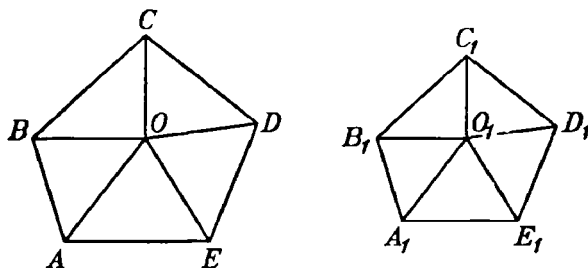


Рис. 259.

Но из подобия многоугольников следует:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \dots$$

и потому

$$\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{CD}{C_1D_1}\right)^2 = \dots$$

Значит,

$$\frac{\text{площадь } AOB}{\text{площадь } A_1O_1B_1} = \frac{\text{площадь } BOC}{\text{площадь } B_1O_1C_1} = \frac{\text{площадь } COD}{\text{площадь } C_1O_1D_1} = \dots,$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\text{площадь } AOB + \text{площадь } BOC + \text{площадь } COD + \dots}{\text{площадь } A_1O_1B_1 + \text{площадь } B_1O_1C_1 + \text{площадь } C_1O_1D_1 + \dots} &= \\ &= \frac{\text{площадь } ABCDE}{\text{площадь } A_1B_1C_1D_1E_1} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2}. \end{aligned}$$

Следствие. Площади правильных одноименных многоугольников относятся, как квадраты сторон, или как квадраты радиусов апофем.

261. Задача. Разделить данный треугольник на t равновеликих частей прямыми, параллельными его стороне.

Пусть, например, требуется разделить $\triangle ABC$ (рис. 260) на три равновеликие части отрезками, параллельными основанию AC .

Предположим, что искомые отрезки будут DE и FG . Очевидно, что если мы найдем отрезки BE и BG , то определятся и отрезки DE и FG . Треугольники BDE , BFG и BAC подобны; поэтому

$$\frac{\text{площадь } BDE}{\text{площадь } BAC} = \frac{BE^2}{BC^2} \text{ и}$$

$$\frac{\text{площадь } BFG}{\text{площадь } BAC} = \frac{BG^2}{BC^2}.$$

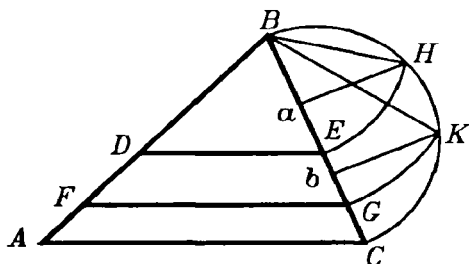


Рис. 260.

Но

$$\frac{\text{площадь } BDE}{\text{площадь } BAC} = \frac{1}{3} \text{ и } \frac{\text{площадь } BFG}{\text{площадь } BAC} = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$\frac{BE^2}{BC^2} = \frac{1}{3} \text{ и } \frac{BG^2}{BC^2} = \frac{2}{3},$$

откуда

$$BE = \sqrt{\frac{1}{3} BC^2} = \sqrt{\frac{1}{3} BC \cdot BC}$$

и

$$BG = \sqrt{\frac{2}{3} BC^2} = \sqrt{\frac{2}{3} BC \cdot BC}.$$

Из этих выражений видим, что BE есть средняя пропорциональная между BC и $\frac{1}{3}BC$, а BG есть средняя пропорциональная между BC и $\frac{2}{3}BC$. Поэтому построение можно выполнить так: разделим BC на три равные части в точках a и b ; опишем на BC полуокружность; из a и b восставим к BC перпендикуляры aH и bK . Хорды $HВ$ и $KВ$ будут искомыми средними пропорциональными; первая — между всем диаметром BC и его третьей частью $Вa$, вторая — между BC и Bb , т. е. между BC и $\frac{2}{3}BC$. Остается отложить эти хорды на BC от точки B , тогда получим искомые точки E и G . Подоб-

ным образом можно разделить треугольник на какое угодно число равновеликих частей.

II. ПЛОЩАДЬ КРУТА И ЕГО ЧАСТЕЙ

262. Лемма. *При неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника сторона его может сделаться как угодно малой.*

Пусть n есть число сторон правильного вписанного многоугольника и p — его периметр; тогда длина одной стороны этого многоугольника выразится дробью $\frac{p}{n}$. При неограни-

ченном удвоении числа сторон многоугольника знаменатель этой дроби будет, очевидно, возрастать неограниченно, а числитель, т. е. p , хотя и будет возрастать, но не беспрельдно (так как периметр всякого вписанного выпуклого многоугольника всегда остается меньшим периметра любого описанного многоугольника). Если же в какой-нибудь дроби знаменатель неограниченно возрастает, а числитель остается меньше некоторой постоянной величины, то дробь эта может сделаться как угодно малой. Значит, то же самое можно сказать о стороне правильного вписанного много-

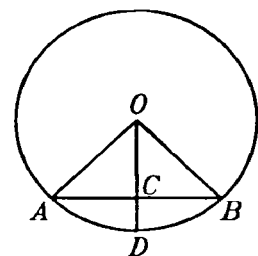


Рис. 261.

угольника: при неограниченном удвоении числа сторон она может сделаться как угодно малой.

263. Следствие. Пусть (рис. 261) AB есть сторона правильного вписанного многоугольника, OA — радиус и OC — апофема. Из $\triangle OAC$ находим:

$$OA - OC < AC,$$

т. е.

$$OA - OC < \frac{1}{2} AB.$$

Но при неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника сторона его, как мы сейчас доказали, может сделаться как угодно малой; значит, то же самое можно сказать и о разности $OA - OC$. Таким образом, при неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника *разность между радиусом и*

апофемой может сделаться как угодно малой. Это же можно высказать другими словами так: при неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника предел, к которому стремится апофема, есть радиус.

264. Площадь круга. Впишем в круг, радиус которого обозначим через R , какой-нибудь правильный многоугольник. Пусть

площадь этого многоугольника будет q ,
 периметр $\bullet$ $\bullet$ $\bullet$ P ,
 апофема $\bullet$ $\bullet$ $\bullet$ a .

Мы видели (§ 252, следствие), что между этими величинами есть такая зависимость:

$$q = \frac{1}{2} P \cdot a.$$

Вообразим теперь, что число сторон этого многоугольника неограниченно удваивается. Тогда периметр P и апофема a (следовательно и площадь q) будут увеличиваться, причем периметр будет стремиться к пределу, принимаемому за длину C окружности, апофема будет стремиться к пределу, равному радиусу R круга. Из этого следует, что площадь многоугольника, увеличиваясь при удвоении числа сторон, будет стремиться к пределу, равному $\frac{1}{2} C \cdot R$. Предел этот принимается за численную величину площади круга. Таким образом, обозначив площадь круга буквой K , можем написать:

$$K = \frac{1}{2} C \cdot R,$$

т. е. *площадь круга равна половине произведения длины окружности на радиус.*

Так как $C = 2\pi R$, то

$$K = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2,$$

т. е. *площадь круга равна квадрату радиуса, умноженному на отношение длины окружности к диаметру.*

265. Следствие. Площади кругов относятся, как квадраты радиусов или диаметров.

Действительно, если K и K_1 будут площади двух кругов, а R и R_1 — их радиусы, то

$$K=\pi R^2$$

и

$$K_1=\pi R_1^2,$$

откуда

$$\frac{K}{K_1} = \frac{\pi R^2}{\pi R_1^2} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{4R^2}{4R_1^2} = \frac{(2R)^2}{(2R_1)^2}.$$

266. Задача 1. Вычислить площадь круга, длина окружности которого равна 2 м.

Для этого предварительно найдем радиус R из равенства:

$$2\pi R=2,$$

откуда

$$R = \frac{1}{\pi} = 0,3183\dots$$

Затем определим площадь круга:

$$K=\pi R^2=\pi\left(\frac{1}{\pi}\right)^2=\frac{1}{\pi}=0,3183\dots \text{ м}^2.$$

267. Задача 2. Построить квадрат, равновеликий данному кругу.

Эта задача, известная под названием квадратуры круга, не может быть решена при помощи циркуля и линейки. Действительно, если обозначим буквой x сторону искомого квадрата, а буквой R — радиус круга, то получим уравнение:

$$x^2=\pi R^2,$$

откуда

$$\pi R : x = x : R,$$

т. е. x есть средняя пропорциональная между полуокружностью и радиусом. Следовательно, если известен отрезок, длина которого равна длине полуокружности, то легко построить квадрат, равновеликий данному кругу, и обратно: если известна сторона квадрата, равновеликого кругу, то можно построить отрезок, равный по длине полуокружности. Но с помощью циркуля и линейки нельзя построить отрезок, длина которого равнялась бы длине полуокружности; следовательно, нельзя в точности решить задачу о построении квадрата, равновеликого кругу. Приближенное решение можно выполнить, если предварительно найти приближенную длину полу-

окружности и затем построить среднюю пропорциональную между отрезком этой длины и радиусом.

268. Теорема. *Площадь сектора равна произведению длины его дуги на половину радиуса.*

Пусть дуга AB (рис. 262) сектора AOB содержит n° . Очевидно, что площадь сектора, дуга которого содержит 1° , составляет $\frac{1}{360}$ часть площади круга, т. е.

она равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Следовательно, площадь S

сектора, дуга которого содержит n° , равна:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R n}{180} \cdot \frac{R}{2}.$$

Так как дробь $\frac{\pi R n}{180}$ выражает длину дуги AB (§ 239), то, обозначив ее буквой s , получим:

$$S = s \cdot \frac{R}{2}.$$

269. Площадь сегмента. Для нахождения площади сегмента, ограниченного дугой s и хордой AB (рис. 262), надо отдельно вычислить площадь сектора AOB и площадь треугольника AOB и из первой вычесть вторую.

Впрочем, когда градусное измерение дуги s невелико, площадь сегмента можно вычислять по следующей приближенной формуле (мы ее приводим без доказательства):

$$\text{площадь сегмента} = \frac{2}{3}bh, \quad (1)$$

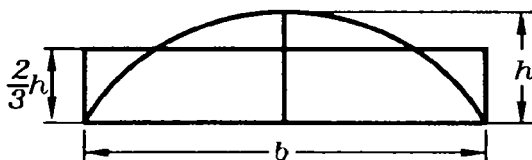


Рис. 263.

где b есть основание сегмента (рис. 263), а h — его высота (обыкновенно называемая стрелкой сегмента). Доказано, что погрешность результата вычисления, получаемого по этой

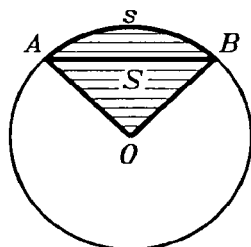


Рис. 262.

приближенной формуле, тем меньше, чем меньше отношение $h:b$; так, если h меньше $\frac{1}{9}b$ (что бывает тогда, когда дуга s содержит меньше 50°), то погрешность оказывается меньше 1% площади.

Более точные результаты дает более сложная формула:

$$\text{площадь сегмента} = \frac{2}{3}bh + \frac{h^3}{2b}. \quad (2)$$

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать теоремы

1. В параллелограмме расстояния любой точки диагонали от двух прилежащих сторон обратно пропорциональны этим сторонам.

2. Площадь трапеции равна произведению одной из непараллельных сторон на перпендикуляр, опущенный из середины другой непараллельной стороны на первую.

3. Два четырехугольника равновелики, если у них равны соответственно диагонали и угол между ними.

4. Если площади двух треугольников, прилежащих к основаниям трапеции и образуемых пересечением ее диагоналей, равны соответственно p^2 и q^2 , то площадь всей трапеции равна $(p+q)^2$.

5. Площадь правильного вписанного шестиугольника равна $\frac{3}{4}$ площади правильного описанного шестиугольника.

6. В четырехугольнике $ABCD$ через середину диагонали BD проведена прямая, параллельная другой диагонали AC . Эта прямая пересекает сторону AD в точке E . Доказать, что отрезок CE делит четырехугольник пополам.

7. Если медианы треугольника взять за стороны другого треугольника, то площадь последнего равна $\frac{3}{4}$ площади первого.

8. В круге с центром O проведена хорда AB . На радиусе OA , как на диаметре, описана окружность. Доказать, что площади двух сегментов, отсекаемых хордой AB от обоих кругов, относятся, как 4:1.

Задачи на вычисление

9. Вычислить площадь прямоугольной трапеции, у которой один из углов равен 60° , зная или оба основания, или одно основание и высоту, или одно основание и боковую сторону, наклонную к основанию.

10. Даны основания трапеции B и b и ее высота H . Вычислить высоту треугольника, образованного продолжением непараллельных сторон трапеции до взаимного пересечения.

11. В треугольник вписан другой треугольник, вершины которого делят пополам стороны первого треугольника; в другой треугольник вписан подобным же образом третий; в третий — четвертый и т. д. неограниченно. Найти предел суммы площадей этих треугольников.

12. По трем данным сторонам a , b и c треугольника вычислить радиус r круга, вписанного в этот треугольник.

Указание. Если S есть площадь треугольника, то легко усмотреть, что

$$S = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr = pr,$$

где p означает полупериметр треугольника. С другой стороны, площадь S выражается формулой, выведенной в § 256. Отсюда можно получить формулу для r .

13. Вычислить стрелку (высоту) и площадь сегмента в зависимости от радиуса r круга, если центральный угол, соответствующий сегменту, содержит 60° . Вычисление это произвести трояким путем: 1) посредством вычитания из площади сектора площади треугольника; 2) по первой приближенной формуле, указанной в § 269 этой книги, и 3) по второй приближенной формуле, указанной там же. Сравните результаты вычисления друг с другом с целью определить абсолютную и относительную погрешности приближенных результатов.

Решение:

$$b=r;$$

$$h=r - \frac{1}{2} r\sqrt{3} = \frac{1}{2} r(2 - \sqrt{3}) = 0,1340r;$$

$$1) \text{ площадь } p_1 = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} = r^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 0,0906r^2;$$

$$2) \text{ площадь } p_2 = \frac{2}{3}bh = \frac{2}{3} \cdot r \cdot 0,1340r = 0,0893r^2;$$

$$3) \text{ площадь } p_3 = \frac{2}{3}bh + \frac{h^3}{2b} = 0,0893r^2 + 0,0012r^2 = 0,0905r^2.$$

Абсолютная погрешность:

$$\text{для площади } p_2 = 0,0906r^2 - 0,0893r^2 = 0,0013r^2;$$

$$\text{для площади } p_3 = 0,0906r^2 - 0,0905r^2 = 0,0001r^2.$$

Относительная погрешность (т. е. отношение абсолютной погрешности к измеряемой величине):

$$\text{для площади } p_2 = \frac{p_1 - p_2}{p_1} = \frac{0,0013r^2}{0,0906r^2} = 0,014 = 1,4\%;$$

$$\text{для площади } p_3 = \frac{p_1 - p_3}{p_1} = \frac{0,0001r^2}{0,0906r^2} = 0,001 = 0,1\%.$$

Таким образом, результат, вычисленный по первой приближенной формуле, меньше истинного результата (приблизительно) на 1,4%, а результат, вычисленный по второй приближенной формуле, меньше истинного на 0,1%.

14. 1) Зная основание b сегмента и высоту его (стрелку) h , вычислить радиус r круга.

Указание. Из прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза есть r , один катет $\frac{b}{2}$, а другой $r-h$, находим уравнение:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (r-h)^2 = r^2,$$

из которого легко определить r .

2) Вычислить диаметр круга, если известно, что при основании сегмента, равном 67,2 см, стрелка его составляет 12,8 см (см. предыдущее указание).

Задачи на построение

15. Разделить треугольник прямыми, проходящими через его вершину, на три части, площади которых относятся, как $m:n:p$.

16. Разделить треугольник на две равновеликие части прямой, проходящей через данную точку его стороны.

17. Найти внутри треугольника такую точку, чтобы прямые, соединяющие ее с вершинами треугольника, делили его на три равновеликие части.

Указание. Разделим сторону AC на 3 равные части в точках D и E . Через D проводим прямую, параллельную AB , и через E — прямую, параллельную BC . Точка пересечения этих прямых — искомая.

18. То же — на три части в отношении $2:3:4$ (или вообще $m:n:p$).

19. Разделить параллелограмм на три равновеликие части прямыми, исходящими из вершины его.

20. Разделить параллелограмм на две части прямой, проходящей через данную точку, так, чтобы их площади относились, как $m:n$.

Указание. Среднюю линию параллелограмма разделить в отношении $m:n$ и точку деления соединить прямой с данной точкой.

21. Разделить параллелограмм на три равновеликие части прямыми, параллельными диагонали.

22. Разделить площадь треугольника в среднем и крайнем отношении прямой, параллельной основанию.

Указание. Решается приложением алгебры к геометрии.

23. Разделить треугольник на три равновеликие части прямыми, перпендикулярными к основанию.

24. Разделить круг на 2, на 3, ... равновеликие части концентрическими окружностями.

25. Разделить трапецию на две равновеликие части прямой, параллельной основаниям.

Указание. Продолжив непараллельные стороны до взаимного пересечения, взять за неизвестную величину расстояние конца искомой линии до вершины треугольника; составить пропорции, исходя из площадей подобных треугольников.

26. Данный прямоугольник преобразовать в другой равновеликий прямоугольник с данным основанием.

27. Построить квадрат, равновеликий $\frac{2}{3}$ данного квадрата.

28. Преобразовать квадрат в равновеликий прямоугольник, у которого сумма или разность d двух смежных сторон дана.

29. Построить круг, равновеликий кольцу, заключенному между двумя данными концентрическими окружностями.

30. Построить треугольник, подобный одному и равновеликий другому из двух данных треугольников.

31. Данный треугольник преобразовать в равновеликий равносторонний (посредством приложения алгебры к геометрии).

32. В данный круг вписать прямоугольник с данной площадью m^2 (посредством приложения алгебры к геометрии).

33. В данный треугольник вписать прямоугольник с данной площадью m (приложением алгебры к геометрии; исследовать).

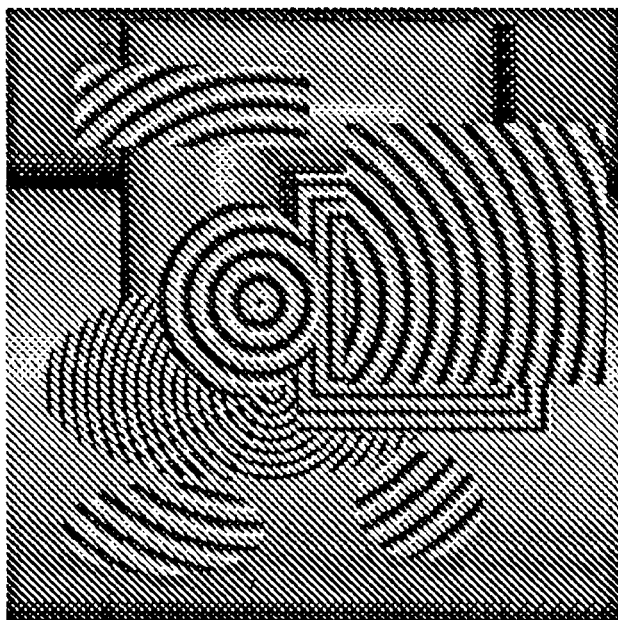
Н.А.Рыбкин

Задачник по геометрии

.....

ПЛАНИМЕТРИЯ

для 7-9 классов



§ 1. Прямая линия¹

Измерение отрезков и действия над ними

1. На рисунке 1 изображена часть станка. Измерить, пользуясь данным масштабом, отрезки, обозначенные на чертеже размерными линиями, и записать полученные числа в тетради.

2. Сращены впритык три деревянные балки: длина первой 4,8 м, второй 3,4 м и третьей 5,8 м. Найти их общую длину арифметически и построением, изображая 1 м отрезком в 1 см.

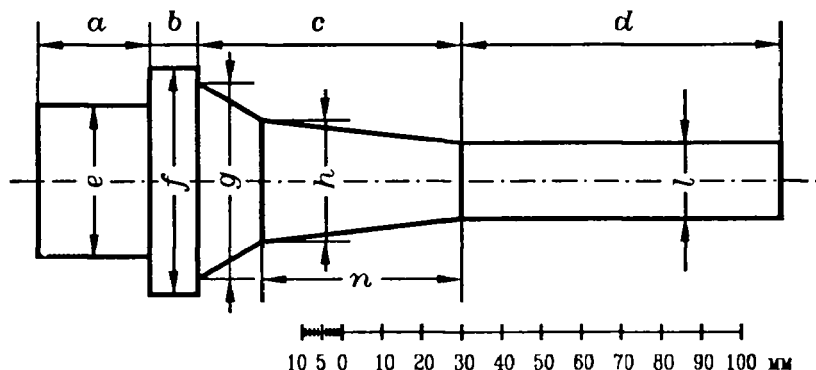


Рис. 1.

3. Ель имела 20,25 м длины; от нее отпилили снизу отрезок («лапу») длиной в 3,75 м, а затем бревно в 7,40 м. Какую длину имеет оставшаяся часть ели?

4. На отрезке AB длиной в 20 м от конца A отложена часть $AC=5,1$ м, от конца B часть $BD=7,9$ м. Определить длину отрезка CD .

5. Решить задачу 4, изменив числа так: $AB=4,8$ м, $AC=2,8$ м, $BD=3$ м.

6. Начертить отрезок, равный $3a+2b$, где a и b — длины, данных отрезков.

¹ Задачи этого параграфа решать геометрическим построением; решения проверять арифметически.

7. Начертить отрезок, равный $4m-3n$, где m и n — длины данных отрезков ($m > n$).

8. От точки M отложены на одной прямой и в одном направлении два отрезка: $MN=100$ см и $MP=160$ см. Найти расстояние между серединами этих отрезков.

9. Отрезок AB разделен на две неравные части. Расстояние между серединами этих частей равно 2,75 м. Найти длину AB .

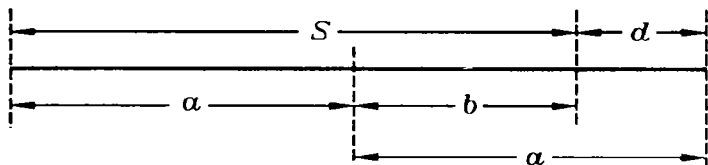


Рис. 2.

10. Объяснить по чертежу (рис. 2), как по данной сумме S двух отрезков и их разности d найти построением оба отрезка ($S=7$ см; $d=1,5$ см).

Пропорциональное деление в применении к отрезкам

11. Отрезок AB равен 2,8 м. Найти расстояние между серединой этого отрезка и точкой, которая делит его в отношении $\frac{2}{3} : \frac{4}{15}$.

12. Отрезок AB продолжен на длину BC так, что AC в m раз более AB ($m=5$). Найти отношение $AB:BC$.

13. Отрезок AB разделен на три части в отношении 2:3:4. Расстояние между серединами крайних частей равно 5,4 м. Определить длину AB .

14. Отрезок AB делится точкой C в отношении 5:7, а точкой D в отношении 5:11; расстояние между C и D равно 10 м. Определить длину AB .

Длина ломаной

15. Дана ломаная $ABCDE$ (рис. 3). Найти сумму отрезков ломаной, измерив каждый отрезок. Выпрямив ломаную (построением), измерить длину получившегося отрезка. Сравнить оба полученных ответа.

16. На рисунке 4 дана карта воздушных сообщений. Сравнить (посредством выпрямления ломаных) расстояния от Москвы до Киева, Екатеринбургa и Ташкента. Найти, пользуясь масштабом, каждое из этих расстояний.

Точки и прямые, их взаимное расположение

17. Узнать, лежат ли точки A , B и C на одной прямой, если расстояния между ними таковы:

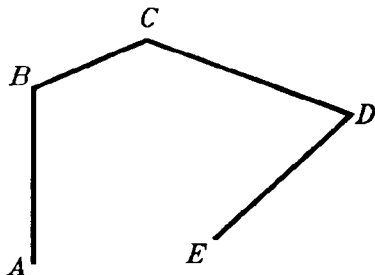


Рис. 3.

1) $AB=20$ м, $AC=13$ м,
 $BC=7$ м.

2) $AB=4$ м, $AC=7$ м,
 $BC=3$ м.

3) $AB=1,8$ м, $AC=1,3$ м,
 $BC=3$ м.

18. 1) Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Сколько различных прямых линий можно провести через три

точки, беря их попарно?

2) Сколькими прямыми можно соединить попарно 4 точки, из которых никакие 3 не расположены на одной прямой? Тот же вопрос относительно 5 точек, 20 точек, n точек.

§ 2. Углы

Построение и измерение углов и действия над ними

1. Построить угол, равный данному углу.

2. При помощи транспортира построить углы в 60° ; 75° ; 125° ; 150° .

3. Построить на глаз углы в 30° ; 45° ; 120° и 135° . Проверить построенные углы транспортиром.

Задачи 4—16 решать сначала геометрическим построением при помощи транспортира, а затем проверить решение арифметически.

4. Построить угол, равный сумме двух углов.

5. Найти сумму трех данных углов.

6. Найти сумму углов: 1) $45^{\circ}36'$ и $78^{\circ}57'$; 2) $26^{\circ}16'45''$ и $117^{\circ}52'30''$; 3) $15^{\circ}40'$, $37^{\circ}50'30''$, $88^{\circ}45'$ и $20^{\circ}30'40''$.

7. Построить угол, равный разности двух данных углов.

8. Найти разность углов: 1) $96^{\circ}35'15''$ и $48^{\circ}45'45''$; 2) $71^{\circ}10'$ и $29^{\circ}52'30''$; 3) $153^{\circ}17'42''$ и $68^{\circ}29'$.

9. Найти дополнение до прямого угла к следующим острым углам: 1) 70° ; 2) $34^{\circ}23'$; 3) $22^{\circ}42'38''$.

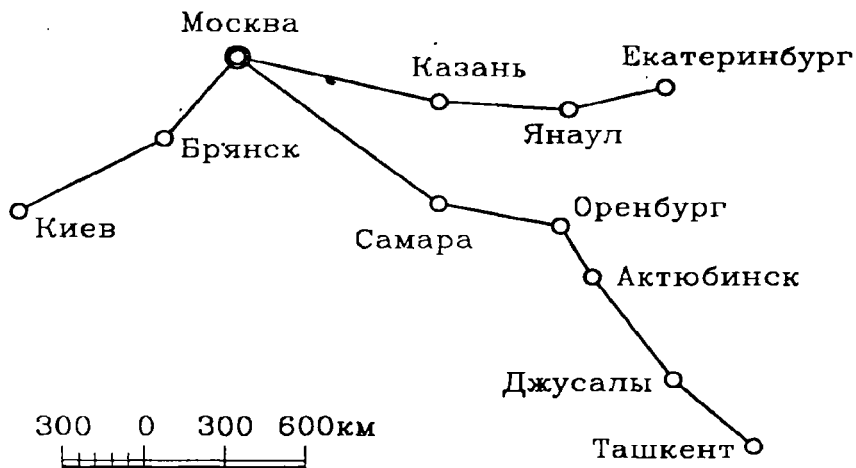


Рис. 4.

10. По данным сумме и разности двух углов построить эти углы.

11. Данный острый угол увеличить в 3 раза.

12. Найти произведение: 1) $35^{\circ}42' \cdot 5$; 2) $17^{\circ}23'45'' \cdot 4$; 3) $55^{\circ}32'30'' \cdot 3$.

13. Разделить данный угол на 2, 4, 8, 16 равных частей.

14. Найти частное: 1) $93^{\circ}15' : 3$; 2) $147^{\circ}45' : 2$; 3) $98^{\circ}21'50'' : 4$; 4) $161^{\circ}40' : 8$.

15. Начертить острый и тупой углы. Узнать, сколько раз острый угол содержится в тупом.

16. Найти частное: 1) $105^{\circ} : 30^{\circ}$; 2) $66^{\circ}55' : 24^{\circ}20'$; 3) $28^{\circ}35' : 40^{\circ}50'$.

Прилежащие углы

17. Внутри тупого угла восстановлены из его вершины перпендикуляры к его сторонам; угол между этими перпен-

дикулярами равен $\frac{4}{7}d$. Определить тупой угол. Сделать точный чертеж, пользуясь транспортом.

18. Даны два прилежащих угла: острый и тупой. Прямая, проведенная через их вершину перпендикулярно к их общей стороне, отклонена от другой стороны острого угла на $\frac{5}{7}d$, а от другой стороны тупого угла на $\frac{3}{7}d$. Найти сумму данных углов и сделать точный чертеж.

Смежные углы

19. Запасной путь на железнодорожной станции отходит от главного пути под углом в 20° . Начертить расположение путей.

20. Начертить угол, который в сумме с данным углом ABC составляет два прямых угла.

21. На прямой AB взята точка C и из нее проведен луч CD так, что угол ACD в 4 раза более угла BCD . Определить величину этих углов.

22. Определить два смежных угла, из которых один на $\frac{2}{9}d$ более другого.

23. Определить угол, который равен $\frac{3}{7}$ своего смежного.

24. Из двух прилежащих углов ABC и CBD первый равен 108° , а второй меньше его в $1\frac{1}{2}$ раза. Составляют ли стороны BA и BD одну прямую линию?

25. Отношение двух прилежащих углов равно $7:3$, а разность их равна 72° . Будут ли эти углы смежными?

26. Углы ABC и CBD смежные, угол $CBD=0,375d$. Определить угол между перпендикуляром, проведенным из точки B к прямой AB , и биссектрисой угла ABC . Сделать чертеж.

27. Доказать, что биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны.

28. Определить два прилежащих угла AOB и BOC , зная, что их сумма равна 216° и что продолжение стороны AO (за вершину) делит угол BOC пополам. Сделать точный чертеж.

29. Из четырех прилежащих углов AOB , BOC , COD , DOE каждый следующий больше предыдущего на $\frac{1}{9}d$; стороны AO и OE составляют одну прямую. Вычислить и построить эти углы.

30. Верхняя часть окна имеет вид, показанный на рисунке 5. Определить, сколько градусов содержит угол между двумя соседними лучами.

Углы с общей вершиной, расположенные по обе стороны прямой

31. Сколько градусов содержит угол между двумя соседними спицами колеса, которое имеет 18 спиц? 16 спиц?

32. Угол ABC равен $\frac{6}{11}d$; из вершины B проведен вне угла ABC луч BD , равноотклоненный от прямых BA и BC . Вычислить величину этого отклонения.

33. Четыре угла, образуемые четырьмя лучами, выходящими из одной точки, таковы, что каждый следующий угол вдвое больше предыдущего. Найти величину каждого из них и построить эти углы.

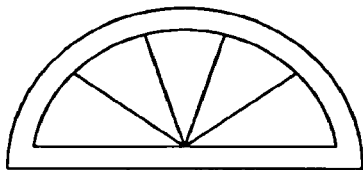


Рис. 5.

Противоположные (вертикальные) углы

34. Один из четырех углов, образуемых двумя пересекающимися прямыми, равен $\frac{3}{5}d$. Как велик каждый из остальных углов?

35. С помощью одной линейки начертить угол, равный данному углу и имеющий с ним общую вершину.

36. Прямые AB и CD пересекаются в точке O . Сумма углов AOD и COB равна 220° . Определить угол AOC .

37. Данный угол и два смежных с ним составляют в сумме $2\frac{3}{8}d$. Определить данный угол.

§ 3. Треугольники и многоугольники. Перпендикуляр и наклонные. Осевая симметрия

Равнобедренный треугольник

1. Построить равнобедренный треугольник:

- 1) по основанию и боковой стороне;
- 2) по основанию и углу при основании;

- 3) по боковой стороне и углу при вершине;
- 4) по боковой стороне и углу при основании.

2. На боковой стороне равнобедренного треугольника построен равносторонний треугольник; периметр этого второго треугольника равен 45 м, а периметр первого треугольника 40 м. Определить основание заданного треугольника.

Построение треугольников и равенство их

3. Построить треугольник:

- 1) по стороне и двум прилежащим углам;
- 2) по двум сторонам и углу между ними;
- 3) по трем сторонам.

4. В равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основании равны. Доказать.

5. Доказать, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, равны.

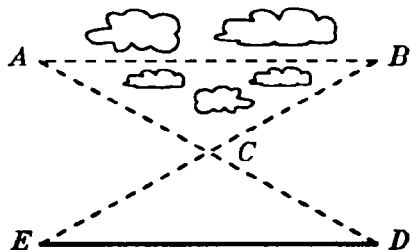


Рис. 6.

6. Чтобы измерить на местности расстояние между двумя точками A и B , между которыми нельзя пройти с мерной цепью (рис. 6), выбирают точку C , из которой были бы видны как точка A , так и B и из которой можно было бы к ним пройти. Провешивают¹ AC и BC , продолжают их за точку C и отме-

ряют $CD=AC$ и $EC=CB$. Тогда отрезок ED равен искомому расстоянию AB . Почему?

7. Чтобы измерить на местности расстояние между двумя точками A и B , из которых одна (точка A) недоступна, провешивают направление отрезка AB (рис. 7) и на его продолжении отмеряют произвольный отрезок BE . Выбирают на местности точку D , из которой можно было бы видеть точку A и пройти к точкам B и E . Провешивают прямые BDG и EDF и отмеряют $FD=DE$ и $DG=BD$. Затем идут по прямой FG , смотря на точку A , пока не найдут такую точку H , которая лежит на прямой AD . Тогда HG равно искомому расстоянию. Доказать.

¹ То есть отмечают направление шестами-вехами.

8. На каждой стороне равностороннего треугольника ABC отложены отрезки $AB_1=BC_1=CA_1$. Точки A_1 , B_1 и C_1 соединены прямыми. Доказать, что треугольник $\Delta A_1B_1C_1$ тоже равносторонний.

9. Каждая из сторон равностороннего треугольника ABC продолжена: AB —за вершину B ; BC —за вершину C ; CA —за вершину A ; на продолжениях отложены отрезки равной длины, и концы их соединены между собой. Определить вид полученного треугольника.

10. 1) Построить треугольник по двум сторонам и углу, лежащему против большей из них.

2) Доказать теорему: если две стороны и угол против большей из них одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу против большей из них другого треугольника, то треугольники равны.

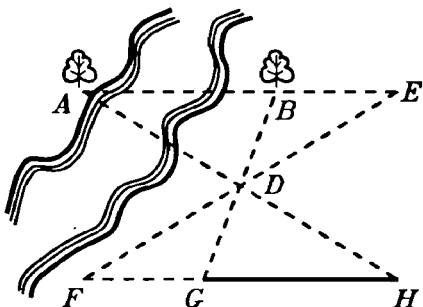


Рис. 7.

11. 1) Построить треугольник по двум сторонам и углу, лежащему против меньшей из них.

2) Показать, что если две стороны и угол против меньшей из них одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу против меньшей из них другого треугольника, то треугольники могут быть как равными, так и неравными.

12. Доказать теорему: если две стороны и медиана одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны. Рассмотреть два случая: 1) медиана проведена к одной из данных сторон; 2) медиана проведена между данными сторонами.

Зависимость между сторонами треугольника

13. Может ли быть треугольник с такими сторонами: 1) 5 м, 10 м, 12 м; 2) 1 м, 2 м, 3,3 м; 3) 1,2 м, 1 м, 2,2 м?

14. Могут ли стороны треугольника относиться, как: 1) 1:2:3; 2) 2:3:4?

15. В треугольнике одна сторона равна 1,9 м, а другая — 0,7 м. Определить третью сторону, зная, что она выражается в целых метрах.

16. Периметр равнобедренного треугольника равен 1 м, а основание равно 0,4 м. Определить длину боковой стороны.

17. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 м, а другая — 10 м. Какая из них служит основанием?

18. Медиана, проведенная к одной из боковых сторон равнобедренного треугольника, делит его периметр на две части длиной в 15 см и 6 см. Определить стороны треугольника.

19. Доказать, что в треугольнике каждая сторона менее половины периметра.

20. Доказать, что сумма расстояний какой-нибудь точки внутри треугольника до его вершин более половины периметра.

21. Внутри треугольника ABC проведена к стороне BC прямая AD так, что угол CAD равен углу ACD . Периметры треугольников ABC и ABD равны 37 м и 24 м. Определить длину AC .

22. В равнобедренном треугольнике ABC проведена высота BD . Периметр треугольника ABC равен 50 м, а периметр треугольника ABD равен 40 м. Определить высоту BD .

Перпендикуляр и наклонные

23. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона AB равна 14 см; из ее середины D проведен к ней перпендикуляр DE до пересечения со стороной BC , и точка E соединена с A ; периметр треугольника ACE равен 24 см. Определить длину AC .

24. Из одной точки проведены к данной прямой две равные наклонные; расстояние между их основаниями равно 16 м. Определить проекцию каждой наклонной на данную прямую.

Построение и равенство прямоугольных треугольников

25. Построить прямоугольный треугольник:

- 1) по двум катетам;
- 2) по катету и гипотенузе;
- 3) по катету и острому углу;

4) по гипотенузе и острому углу.

26. Чтобы измерить расстояние между пунктами A и B , расположенными на разных берегах реки, при помощи эккера провешивают перпендикулярно к AB отрезок BD произвольной длины (рис. 8). Делят BD в точке E пополам. Проводят перпендикуляр DC к BD в точке D ; идут по DC , смотря на A , до той точки C , которая лежит на прямой AE . Длина DC равна AB . Доказать.

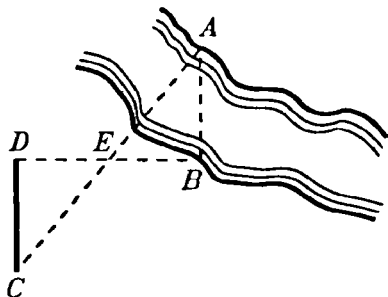


Рис. 8.

27. 1) Доказать, что прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла, отсекает от его сторон равные отрезки.

2) Через точку, данную внутри или вне угла, провести такую прямую, которая отсекала бы от сторон угла равные части.

28. 1) Доказать, что в равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на боковые стороны, равны.

2) Составить обратную теорему и доказать ее.

29. Три селения A , B и C не лежат на одной прямой. Указать на чертеже, как провести из A прямую дорогу между селениями B и C на равных расстояниях от них.

30. По одну сторону прямой AB даны две точки M и N . Найти на прямой AB такую точку C , чтобы прямая AB составляла равные углы со сторонами ломаной MCN .

Геометрические места точек

31. Дан треугольник ABC . На биссектрисе угла A найти точку, равноудаленную от вершин B и C .

32. Найти точку, равноудаленную от всех вершин треугольника. Всегда ли эта точка будет внутри треугольника?

33. Даны угол и точка M внутри угла. Найти такую точку, которая была бы одинаково удалена от обеих сторон угла и отстояла бы от точки M на данное расстояние a .

34. Найти на стороне треугольника точку, равноудаленную от двух других сторон.

35. В треугольнике найти точку, равноудаленную от всех трех сторон.

36. Дан угол A и точки B и C , расположенные одна на одной стороне угла, другая на другой. Найти:

1) точку M , равноотстоящую от сторон угла и удовлетворяющую условию, что $MC=MB$;

2) точку N , расположенную на стороне угла, причем так, чтобы $NC=CB$;

3) точку P такую, чтобы каждая из точек B и C одинаково отстояла от A и P .

37. Дан угол A и точка B на одной из его сторон. Найти на другой стороне такую точку C , чтобы сумма $CA+CB$ была равна данной длине l .

Четырехугольники

38. Определить стороны четырехугольника, если они относятся между собой, как $2:5:4:8$, а периметр четырехугольника равен 76 м.

39. Могут ли стороны четырехугольника относиться как $2:3:4:10$?

40. 1) Построить четырехугольник, стороны которого 1 см, 2 см, 3 см и 4 см, а диагональ, проходящая между первой и четвертой сторонами, равна $2,6$ см.

2) То же по четырем сторонам, равным $1,2$ см, $1,8$ см, $2,4$ см, $3,0$ см, и углу между второй и третьей сторонами, содержащему 102° .

41. Четырехугольник разделен диагональю на 2 треугольника, периметры которых равны 25 м и 27 м; периметр четырехугольника равен 32 м. Найти длину проведенной диагонали.

Многоугольники

42. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины: 1) пятиугольника; 2) десятиугольника; 3) n -угольника?

43. Сколько получится треугольников, если провести все диагонали из вершины: 1) шестиугольника; 2) восьмиугольника; 3) n -угольника?

44. Сколько всего диагоналей можно провести: 1) в пятиугольнике; 2) в десятиугольнике; 3) в n -угольнике?

45. Сколько сторон в многоугольнике, если число их в m раз больше числа диагоналей, проведенных из одной вершины? ($m=2$; 4; 5.)

46. Сколько сторон имеет многоугольник, если число всех его диагоналей в m раз больше числа сторон? ($m=0,5$; 1; 2; 2,5.)

Осевая симметрия

47. Построить отрезок, симметричный данному относительно данной оси симметрии.

48. Построить треугольник, симметричный данному прямоугольному треугольнику относительно: 1) одного катета; 2) другого катета; 3) гипотенузы.

49. Даны ось симметрии и окружность. Начертить симметричную ей окружность.

50. Даны ось симметрии и ломаная линия. Начертить другую ломаную, симметричную данной.

§ 4. Параллельные прямые. Сумма углов треугольника и многоугольника

Углы при параллельных и секущей

1. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой. Один из полученных восьми углов равен 72° . Чему равен каждый из остальных?

2. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой; при этом один из внутренних углов равен $1\frac{3}{8}d$. Под каким углом его биссектриса пересекает другую параллель?

3. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой. Сумма трех углов: данного внутреннего, внутреннего одностороннего с ним и накрест лежащего с первым углом — равна $3\frac{2}{7}d$. Определить угол, соответственный с первым внутренним.

4. Прямые AMB и CND пересечены прямой $EMNF$, $\angle CNF = \frac{3}{16}d$ и $\angle NMB = \frac{3}{4}d$. Параллельны ли данные прямые? Как надо изменить величину угла NMB , чтобы прямые сделались параллельными?

5. Прямые $AMNB$ и $CRSD$ пересечены прямыми $EMRF$ и $GNSH$. Дано, что $\angle AME = 1\frac{5}{24}d$, $\angle ANS = 1\frac{3}{8}d$ и $\angle MRS = \frac{19}{24}d$. Определить $\angle DSH$.

Углы с параллельными и перпендикулярными сторонами

6. Дан $\angle ABC = 43^\circ$. Из точки P , лежащей внутри этого угла, проведены две прямые параллельно его сторонам до пересечения с ними. Определить углы образовавшегося четырехугольника.

7. Даны два угла с параллельными сторонами; один из них на 90° больше другого. Чему равен каждый угол?

8. Даны два угла с перпендикулярными сторонами; один из них в 4 раза меньше другого. Найти величину каждого угла.

9. Через концы основания треугольника проведены два перпендикуляра к боковым сторонам; пересекаясь, эти перпендикуляры образуют угол в 130° . Вычислить угол при вершине треугольника.

Сумма углов треугольника

10. В треугольнике один угол равен $1\frac{1}{6}d$, а другой $\frac{3}{8}d$.

Чему равен третий угол?

11. Определить углы треугольника, если они относятся как 1:2:3.

12. Два угла треугольника относятся, как 5:7, а третий угол на $\frac{4}{19}d$ больше первого. Определить третий угол.

13. В треугольнике два угла равны: $110^\circ 23' 50''$ и $24^\circ 36' 40''$. Определить третий угол.

14. В прямоугольном треугольнике один острый угол равен $58^\circ 20'$. Определить другой острый угол.

Равнобедренный треугольник

15. В средней полосе России были приняты следующие размеры угла между стропильными ногами AC и AB (рис. 9):

для железных крыш 120° (приблизительно)

♦ толевых ♦ 145°

- ♦ черепичных ♦ 100°
- ♦ тесовых ♦ 90°

Определить для каждой крыши тот угол, который стропильные ноги составляют с горизонтальной линией CB .

16. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $105^\circ 27''$. Определить угол при основании.

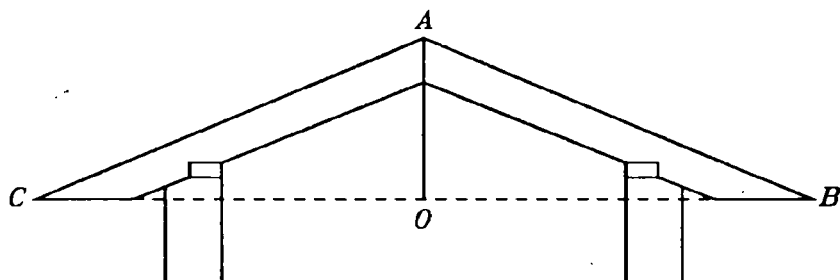


Рис. 9.

17. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен $70^\circ 43'$. Определить угол при вершине.

18. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $1\frac{2}{7}d$. Определить угол при основании.

19. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен $\frac{5}{9}d$. Определить угол при вершине.

20. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 30° ; на боковую сторону опущена высота. Найти угол между этой высотой и основанием.

21. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30° ; найти угол между одной боковой стороной и высотой, опущенной на другую боковую сторону.

22. В равнобедренном треугольнике угол между высотой и боковой стороной на $\frac{1}{7}d$ меньше угла при основании. Определить углы этого треугольника.

Прямоугольный треугольник

23. Для того чтобы измерить высоту дерева BD , приготовили прямоугольный треугольник AB_1C_1 с углом $A=45^\circ$ (рис. 10) и, держа его вертикально, отошли на такое расстояние, при котором, глядя вдоль гипотенузы AB_1 , увидели вер-

хушку дерева B . Какова высота дерева, если расстояние $AC=5,6$ м, а высота человека $1,7$ м?

24. 1) В прямоугольном треугольнике один острый угол равен $\frac{1}{2}d$. Определить катеты, если их сумма равна 36 см.

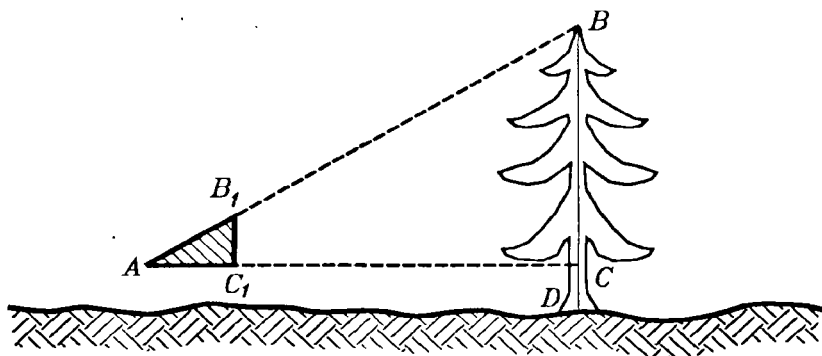


Рис. 10.

2) В прямоугольном треугольнике острый угол равен $\frac{1}{2}d$. Определить гипотенузу, если в сумме с опущенной на нее высотой она составляет 12 см.

Катет, лежащий против угла в 30°

25. Доказать теорему: если в прямоугольном треугольнике один острый угол равен 30° , то противолежащий ему катет равен половине гипотенузы.

26. Обратная теорема (см. задачу 25): если катет вдвое меньше гипотенузы, то противолежащий ему угол равен 30° . Доказать.

27. С помощью циркуля и линейки разделить прямой угол на 3 равные части.

28. В равнобедренном треугольнике один из острых углов равен $\frac{2}{3}d$, а сумма гипотенузы с наименьшим катетом равна $1,8$ м. Определить гипотенузу.

Внешний угол треугольника

29. В треугольнике ABC внешний угол при вершине B в три раза больше угла A и на $\frac{4}{9}d$ больше угла C . Определить углы треугольника.

30. В равностороннем треугольнике проведены две медианы; найти острый угол между ними.

31. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен $\frac{d}{3}$. Найти острый угол между гипотенузой и биссектрисой прямого угла.

32. В равнобедренном треугольнике сумма внутренних углов вместе с одним из внешних равна $21/8d$. Определить углы этого треугольника.

33. Доказать, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.

**Применение теоремы о сумме углов треугольника
к решению разных задач на треугольники**

34. Один из углов треугольника равен $2/3d$; как велик острый угол, образованный биссектрисами двух других углов треугольника?

35. Дан угол A ; от вершины A откладываем на стороне отрезок AB ; из точки B проводим прямую, параллельную второй стороне данного угла; на этой прямой откладываем внутри угла отрезок BD , равный BA , и соединяем точку D с вершиной A . Доказать, что прямая AD делит данный угол пополам.

36. Под каким углом пересекаются биссектрисы двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых?

37. В треугольнике ABC угол B прямой; M — точка пересечения биссектрис углов A и C . Определить угол AMC .

38. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке M . Определить угол ABC , если он равен половине угла AMC .

39. В треугольнике ABC угол B прямой; AD и CE — продолжения гипотенузы AC . Углы BAD и BCE разделены пополам; M — точка пересечения их биссектрис (продолженных за вершины). Определить угол AMC .

40. В равнобедренном треугольнике угол между основанием и высотой, опущенной на боковую сторону, равен $8/15d$. Определить углы этого треугольника.

41. В равнобедренном треугольнике ABC высота AD , опущенная на боковую сторону BC , образует с боковой стороной AB угол $BAD = 1/5d$. Определить углы этого треугольника: 1) предполагая, что высота AD проходит внутри треугольника, и 2) предполагая, что AD проходит вне треугольника.

42. Доказать, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

43. Доказать теорему: если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

44. Если на гипотенузе BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отметить две точки E и D так, что $BE=BA$ и $CD=CA$, то $\angle DAE = \frac{1}{2}d$. Доказать.

45. ABC — равнобедренный треугольник с основанием AC ; CD — биссектриса угла C ; $\angle ABC = \frac{5}{3}d$. Определить $\angle B$.

46. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 36° . Доказать, что биссектриса угла при основании, продолженная до пересечения с противоположной стороной, делит равнобедренный треугольник на два других тоже равнобедренных треугольника.

47. В треугольнике ABC сторона AC продолжена за точку C на длину $CE=CB$ и за точку A на длину $AD=AB$; точки E и D соединены с B . Определить углы треугольника DBE , если углы треугольника ABC известны.

48. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE ; M — точка их пересечения. Определить $\angle AMC$, если дано, что $\angle BAC = \frac{1}{4}d$ и $\angle BCA = \frac{5}{6}d$.

49. В равнобедренном треугольнике ABC высоты AD и CE , опущенные на боковые стороны, образуют $\angle AMC = \frac{8}{15}d$. Определить углы треугольника ABC .

50. В треугольнике ABC из вершины C проведены биссектрисы внутреннего и внешнего углов; первая биссектриса образует со стороной AB угол, равный $\frac{6}{17}d$. Какой угол образует с продолжением стороны AB вторая биссектриса?

51. Из середины гипотенузы восстановлен перпендикуляр до пересечения с катетом, и полученная точка соединена с концом другого катета отрезком, который делит угол треугольника в отношении 2:5 (меньшая часть — при гипотенузе). Определить этот угол.

Сумма углов многоугольника

52. Определить сумму внутренних углов: 1) семиугольника; 2) десятиугольника; 3) двадцати пятиугольника.

53. Определить углы пятиугольника, зная, что величины их относятся между собой, как 1:1, 5:2:2, 5:3.

54. Как изменится сумма углов многоугольника, если число его сторон увеличить на 5?

55. Сколько сторон имеет многоугольник, если сумма его внутренних углов равна: 1) $30d$; 2) $48d$; 3) $57d$?

56. В каком многоугольнике сумма внутренних углов равна сумме внешних углов?

57. Сколько сторон имеет многоугольник, если сумма его внутренних углов вместе с одним из внешних равна $23d$?

58. Определить число сторон многоугольника, если сумма его внутренних углов в m раз больше суммы внешних углов ($m=1, 2, 3$).

59. Определить углы четырехугольника, если из них первые два относятся, как 5:7, третий равен их разности, а четвертый меньше третьего на $\frac{4}{11}d$.

§ 5. Параллелограммы и трапеции

Углы и стороны параллелограмма

1. Один из углов параллелограмма равен $\frac{3}{7}d$. Определить остальные углы.

2. Определить углы параллелограмма, если один из них больше другого на $\frac{3}{11}d$.

3. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 9 см и составляет $\frac{3}{10}$ всего периметра. Определить другие стороны этого параллелограмма.

4. Две стороны параллелограмма относятся, как 3:4, а периметр его равен 2,8 м. Определить стороны.

5. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла A , которая пересекает сторону BC в точке E . Определить отрезки BE и EC , если $AB=9$ см и $AD=15$ см.

6. На чем основано устройство чертежных инструментов, называемых «параллельными линейками» (рис. 11)?

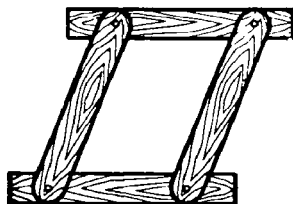


Рис. 11.

7. Стороны параллелограмма равны 8 см и 3 см; биссектрисы двух углов параллелограмма, прилежащие к большей стороне, делят противоположную сторону на три части. Найти каждую из них.

Диагонали параллелограмма

8. Одна из сторон параллелограмма равна 5 м. Могут ли его диагонали выражаться следующими числами: 1) 4 м и 6 м; 2) 4 м и 3 м; 3) 6 м и 7 м?

9. Доказать, что всякий четырехугольник, диагонали которого взаимно делятся пополам, есть параллелограмм.

10. Может ли диагональ параллелограмма равняться его стороне?

11. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Доказать, что отрезок ее между параллельными сторонами делится в этой точке пополам.

12. В параллелограмме $ABCD$ через точку пересечения диагоналей проведена прямая, которая отсекает на сторонах BC и AD отрезки $BE=2$ м и $AF=2,8$ м. Определить стороны BC и AD .

13. В параллелограмме $ABCD$ высота, которая проведена из вершины B , делит основание AD пополам. Определить диагональ BD и стороны параллелограмма, если известно, что периметр параллелограмма содержит 3,8 м и превышает периметр треугольника ABD на 1 м.

Построение параллелограмма

14. Построить параллелограмм, стороны которого даны, если высота, проведенная из вершины тупого угла, делит противоположную сторону пополам.

15. Построить параллелограмм: 1) по двум сторонам длиной в 2 см и 3 см и углу между ними, содержащему 110° ;

2) по двум сторонам, равным 2,1 см и 3,2 см, и одной из диагоналей, равной 4,0 см;

3) по двум диагоналям, равным 6,0 см и 5,0 см, и одной из сторон, равной 4,5 см;

4) по двум диагоналям, равным 5 см и 4 см, и углу между ними, равному 135° ;

5) по основанию, равному 2,0 см, высоте, равной 1,5 см, и диагонали, равной 3,2 см.

Разные задачи на параллелограммы

16. Каждая из боковых сторон равнобедренного треугольника равна 5 дм. Из точки, взятой на основании этого

треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Вычислить периметр получившегося параллелограмма.

17. В параллелограмме угол между высотами, проведенными из вершины острого угла, равен $1\frac{5}{11}d$. Определить углы параллелограмма.

18. Середины E и F параллельных сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$ соединены прямыми с вершинами D и B (рис. 12). Доказать, что эти прямые делят диагональ AC на три равные части.

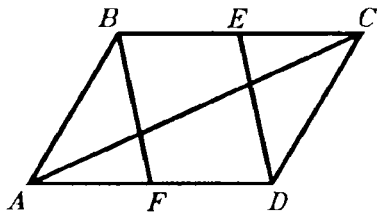


Рис. 12.

19. Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Доказать, что периметр получившегося параллелограмма не зависит от положения точки и равен сумме боковых сторон треугольника.

Прямоугольник

20. В прямоугольнике диагональ образует со стороной угол, равный $2/5d$. Определить угол между диагоналями, обращенный к меньшей стороне.

21. В прямоугольнике определить угол между меньшей стороной и диагональю, если он на $1/3d$ меньше угла между диагоналями, опирающегося на ту же сторону.

22. Существует ли внутри прямоугольника точка, одинаково удаленная: 1) от всех его сторон; 2) от всех его вершин?

23. В прямоугольнике точка пересечения диагоналей стоит от меньшей стороны на 4 см дальше, чем от большей стороны. Периметр этого прямоугольника равен 56 см. Определить его стороны.

24. В прямоугольнике диагонали пересекаются под углом в $2/3d$. Сумма обеих диагоналей и обеих меньших сторон равна 3,6 м. Определить длину диагоналей.

25. $ABCD$ — данный прямоугольник; M — середина стороны BC . Дано, что прямые MA и MD взаимно перпенди-

кулярны и что периметр прямоугольника $ABCD$ равен 24 м. Определить его стороны.

26. Дан прямоугольник; перпендикуляр, опущенный из вершины на диагональ, делит прямой угол на две части в отношении 3:1. Найти угол между этим перпендикуляром и другой диагональю.

27. В прямоугольный треугольник, каждый катет которого равен 6 см, вписан прямоугольник, имеющий с треугольником общий угол. Найти периметр прямоугольника.

28. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие — на катетах. Определить стороны прямоугольника, если известно, что они относятся, как 5:2, а гипотенуза треугольника равна 45 см.

29. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольного треугольника на его диагональ, делит ее в отношении 1:3. Определить длину диагонали, если известно, что точка ее пересечения с другой диагональю удалена от большей стороны на 2 м.

30. Построить прямоугольник:

1) по основанию, равному 2,4 см, и диагонали, равной 3,1 см;

2) по диагонали, равной 4,2 см, и углу между диагоналями, равному 135° ;

3) по основанию, равному 3,2 см, и углу между диагоналями, равному 120° .

Геометрическое место точек, равноудаленных от прямой

31. Найти на данной прямой AB точку, которая находится на расстоянии m ($=2$ см) от другой прямой CD .

32. Найти точку, находящуюся на равном расстоянии от двух данных точек и на расстоянии a ($=6$ см) от данной прямой.

33. Внутри данного угла найти точку, находящуюся на расстояниях m ($=1$ см) и n ($=2$ см) от сторон угла.

34. 1) Внутри данного угла построен другой, одноименный угол, стороны которого параллельны сторонам данного и равно отстоят от них. Доказать, что биссектрисы обоих углов совпадают.

2) Разделить пополам угол, вершина которого не помещается на чертеже.

35. Между сторонами данного острого угла поместить отрезок данной длины так, чтобы он был перпендикулярен к одной стороне угла.

Ромб

36. В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Определить углы ромба.

37. Доказать, что:

- 1) всякий параллелограмм, у которого диагонали перпендикулярны, есть ромб;
- 2) всякий параллелограмм, у которого диагональ делит угол пополам, есть ромб.

38. Сторона ромба образует с его диагоналями углы, разность которых равна $\frac{3}{17}d$. Определить углы ромба.

39. Углы, образуемые стороной ромба с его диагоналями, относятся, как 5:4. Определить углы ромба.

40. Определить углы ромба, если высота, проведенная из вершины тупого угла, делит противоположную сторону пополам.

41. Периметр ромба равен 8 см, высота 1 см. Найти тупой угол ромба.

42. Построить ромб:

- 1) по стороне, равной 2,7 см, и диагонали, равной 6,0 см;
- 2) по двум диагоналям, равным 4 см и 3 см;
- 3) по высоте, равной 2,2 см, и диагонали, равной 4,2 см;
- 4) по углу, содержащему 70° , и диагонали, проходящей через вершину этого угла и равной 3,7 см;
- 5) по диагонали, равной 5 см, и противоположному углу, равному 120° .

Квадрат

43. Построить квадрат по диагонали, равной 3,8 см.

44. Дан квадрат $ABCD$. На каждой из его сторон отложены равные части: $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 соединены последовательно прямыми. Доказать, что $A_1B_1C_1D_1$ есть также квадрат.

45. В равнобедренный прямоугольный треугольник, каждый катет которого 2 м, вписан квадрат, имеющий с ним один общий угол. Найти периметр квадрата.

46. В прямоугольном треугольнике прямой угол разделен пополам; из точки пересечения биссектрисы и гипотенузы проведены прямые, параллельные катетам. Доказать, что четырехугольник, образованный этими прямыми и катетами, есть квадрат.

47. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а другие две — на катетах. Определить сторону квадрата, если известно, что гипотенуза равна 3 м.

48. Дан квадрат, сторона которого равна 1 м; диагональ его служит стороной другого квадрата. Найти диагональ последнего.

49. Диагональ квадрата равна 4 м. Сторона его служит диагональю другого квадрата. Найти сторону последнего.

50. 1) Доказать, что биссектрисы углов прямоугольника своим пересечением образуют квадрат.

2) Стороны прямоугольника 1 см и 3 см. Определить диагонали четырехугольника, образованного биссектрисами внутренних углов.

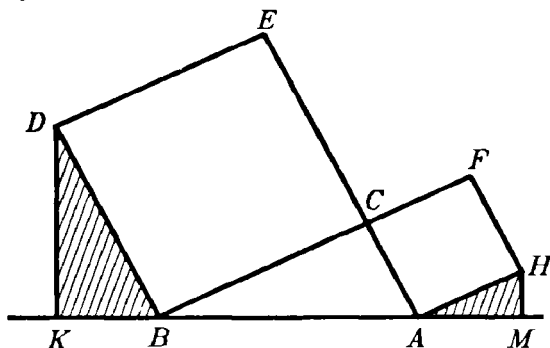


Рис. 13.

51. В квадрат вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата находится одна вершина прямоугольника и стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата. Определить стороны этого прямоугольника, зная, что одна из них вдвое больше другой и что диагональ квадрата равна 12 м.

52. На катетах прямоугольного треугольника ABC построены два квадрата (рис. 13). Из вершин D и H этих квадратов на продолжение гипотенузы опущены два перпендикуляра: DK и HM . Доказать, что: 1) данный треугольник ABC

можно составить из двух заштрихованных треугольников; 2) сумма перпендикуляров HM и DK равна гипотенузе.

Средняя линия треугольника

53. На половине длины стропильных ног, концы которых раздвинуты на 5 м, устроена затяжка (ригель). Определить ее длину.

54. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см, 12 см. Найти стороны треугольника, вершинами которого служат середины сторон данного треугольника.

55. Периметр треугольника равен 12 см; середины сторон соединены последовательно. Найти периметр полученного треугольника.

56. Стороны треугольника относятся, как 3:4:6. Соединив середины всех сторон, получим треугольник с периметром в 5,2 м. Определить стороны данного треугольника.

57. По разные стороны от данной прямой MN даны две точки A и B на расстояниях 10 дм и 4 дм от нее. Найти расстояние середины O отрезка AB от данной прямой.

58. Высота равностороннего треугольника равна 6 дм. Найти проекцию данной высоты на другую высоту.

59. Через вершину тупого угла тупоугольного треугольника проведена вне его прямая; проекции прилежащих к тупому углу сторон на эту прямую равны 4 см и 2 см. Определить проекции всех медиан на ту же прямую.

60. Внутри произвольного угла взята точка M . Провести через точку M прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между сторонами угла, делился в точке M пополам.

Трапеция

61. В трапеции $ABCD$ из вершины B проведена прямая, параллельная боковой стороне CD , до встречи в точке E с большим основанием AD . Периметр треугольника ABE равен 1 м, и длина ED равна 3 дм. Определить периметр трапеции.

62. Боковая сторона трапеции разделена на 6 равных частей, и из точек деления проведены к другой боковой стороне отрезки, параллельные основанию. Определить длины этих отрезков, если основания трапеции равны 10 см и 28 см.

63. В трапеции $ABCD$ (AD — большее основание) дано: $AC \perp CD$; $AB=BC$; $\angle CAD = \frac{2}{7}d$. Определить углы трапеции.

64. В трапеции $ABCD$ (AD — большее основание) диагональ AC перпендикулярна к стороне CD и делит $\angle BAD$ пополам; $\angle CDA = 60^\circ$; периметр трапеции — 2 м. Определить AD .

65. Пусть AD означает большее основание трапеции $ABCD$. Могут ли углы A , B , C и D относиться между собой, как 2:5:6:3?

Средняя линия трапеции

66. Основания трапеции относятся, как 7:3, и разнятся на 3,2 м. Найти длину средней линии этой трапеции.

67. Основания трапеции равны 2,4 м и 3 м. Внутри этой трапеции проведена между боковыми сторонами прямая, параллельная основаниям, которая равна 2,8 м. Одинаково ли удалена эта прямая от обоих оснований или если нет, то к какому основанию она ближе?

68. В трапеции $ABCD$ из середины E боковой стороны AB проведена прямая, параллельная основаниям, до встречи в точке F с боковой стороной CD ; из вершины B проведена прямая, параллельная стороне CD , до встречи в точке G с большим основанием AD . Определить длину оснований, если $EF = 12$ см и $AG = 1$ см.

69. В трапеции $ABCD$ из середины E боковой стороны AB проведена прямая, параллельная боковой стороне CD до встречи в точке G с большим основанием AD . Определить основания трапеции, если $AG = 5$ дм и $GD = 2,5$ м.

70. Средняя линия трапеции равна 8 дм и делится диагональю на два отрезка, разность между которыми равна 2 дм. Определить основания трапеции.

71. Найти отношение между параллельными сторонами трапеции, в которой средняя линия делится двумя диагоналями на 3 равные части.

Равнобедренная трапеция

72. Доказать, что в равнобедренной трапеции углы при основаниях равны.

73. В данной равнобедренной трапеции боковая сторона равна средней линии, периметр содержит 24 м. Определить боковую сторону.

74. Определить углы равнобедренной трапеции, если известно, что разность противоположных углов равна $\frac{8}{13}d$.

75. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна к боковой стороне. Определить углы трапеции.

76. $ABCD$ —равнобедренная трапеция, причем AD —большее основание. Разность между периметрами треугольников ACD и BAC равна 6 дм, а средняя линия трапеции равна 12 дм. Определить основания.

77. В равнобедренной трапеции диагональ делит острый угол пополам; периметр этой трапеции равен 4,5 м, а большее основание равно 1,5 м. Определить меньшее основание.

78. В равнобедренной трапеции высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки в 6 см и 30 см. Определить основания этой трапеции.

79. $ABCD$ —равнобедренная трапеция, причем AD —большее основание, CE —высота, проведенная на AD . Зная, что DE равно 1,25 м и что средняя линия трапеции равна 2,75 м, определить основания.

80. В равнобедренной трапеции большее основание равно 2,7 м, боковая сторона равна 1 м, угол между ними 60° . Определить меньшее основание.

81. В равнобедренной трапеции острый угол равен 45° , высота ее равна h метрам, а средняя линия равна m метрам. Определить основание трапеции.

82. В равнобедренной трапеции высота равна 10 см, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти среднюю линию.

Прямоугольная трапеция

83. Прямоугольная трапеция делится диагональю на два треугольника: равносторонний со стороной a и прямоугольный. Определить среднюю линию трапеции.

84. В прямоугольной трапеции $ABCD$ острый угол $ADC = \frac{1}{2}d$ и сторона $AD = a$. Из середины E стороны CD проведен к ней перпендикуляр, который встречает продолжение стороны BA в точке F . Требуется определить длину BF .

Построение трапеции

85. Построить трапецию:

1) по двум боковым сторонам, равным 1,5 см и 2 см, и основаниям, равным 5 см и 2,3 см;

2) по одному из оснований, равному 4,8 см, высоте, равной 3,2 см, и двум диагоналям, равным 4,2 см и 5 см;

3) по основанию, равному 4 см, боковой стороне, равной 2,4 см, углу между ними, содержащему 72° , и другой боковой стороне, равной 3 см.

86. Построить трапецию:

1) по четырем сторонам (всегда ли построение возможно?);

2) по двум основаниям и по двум диагоналям (условие возможности построения?).

Смешанные задачи на параллелограммы и трапеции

87. Определить вид четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон данного: 1) произвольного четырехугольника; 2) параллелограмма; 3) прямоугольника; 4) ромба; 5) квадрата; 6) трапеции.

88. В четырехугольнике диагонали равны 1 м и 8 дм и пересекаются под углом в $56^\circ 25'$. Определить стороны и углы четырехугольника, который получим, соединяя середины сторон данного.

89. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D ; прямая, проведенная из D параллельно CA , пересекает AB в точке E ; прямая, проведенная из E параллельно BC , пересекает AC в F . Доказать, что $EA=FC$.

90. 1) На основании равнобедренного треугольника взята точка. Доказать, что сумма расстояний этой точки от обеих боковых сторон равна высоте, опущенной на боковую сторону.

2) На продолжении основания равнобедренного треугольника взята точка. Доказать, что разность расстояний этой точки от боковых сторон равна высоте, опущенной на боковую сторону.

Центральная симметрия

91. Найти наименьший угол поворота, при котором совмещаются сами с собой: 1) квадрат; 2) ромб; 3) прямоугольник; 4) пятиконечная звезда.

92. Доказать, что прямая, проходящая через точку O пересечения диагоналей прямоугольника (рис. 14), делит прямоугольник на два центрально-симметричных четырехугольника.

93. Рассмотреть чертеж (рис. 15) и доказать, что точки M и N , K и L центрально-симметричны, т. е. находятся на

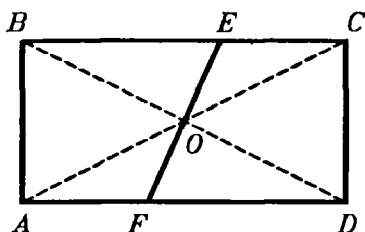


Рис. 14.

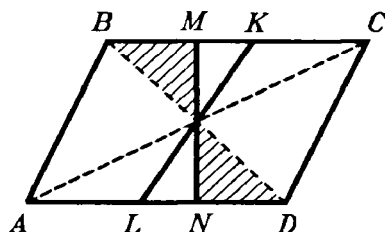


Рис. 15.

одинаковом расстоянии от центра. Каким построением получаются в параллелограмме центрально-симметричные точки?

§ 6. Окружность

Окружность, ее положение. Диаметр, хорда и ее расстояние от центра. Секущая

1. На сторонах угла ABC , равного 120° , отложены отрезки $AB=BC=4$ см. Провести окружность через точки A , B и C и найти, чему равен ее радиус.

2. Найти геометрическое место центров окружностей, имеющих данный радиус и проходящих через данную точку.

3. Провести окружность, которая проходила бы через две данные точки и центр которой находился бы на данной прямой.

4. Построить окружность, проходящую через две данные точки A и B так, чтобы угол между радиусом круга, проведенным в точку A , и хордой AB был равен 30° .

5. 1) Радиус окружности равен 10 см, данная точка удалена от центра на 15 см. Найти ее наименьшее и наибольшее расстояния от окружности.

2) Радиус окружности равен 10 см, данная точка удалена от центра на 3 см. Найти ее наименьшее и наибольшее расстояния от окружности.

6. Наименьшее расстояние данной точки от окружности равно a , наибольшее равно b . Определить радиус (два случая).

7. Доказать, что кратчайшее расстояние между двумя окружностями, лежащими одна вне другой, есть отрезок линии центров, заключенный между окружностями.

8. Из точки, данной на окружности, проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найти угол между ними.

9. Из точки, данной на окружности, проведены две хорды; каждая из них равна радиусу. Найти угол между ними.

10. В круге даны две взаимно перпендикулярные хорды; каждая из них делится другой на два отрезка в 3 см и 7 см. Найти расстояние каждой хорды от центра.

11. В круге на расстоянии 1 см от центра даны две взаимно перпендикулярные хорды; каждая из них равна 6 см. Найти, на какие две части одна хорда делится другой.

12. В круге радиуса R даны два взаимно перпендикулярных диаметра; произвольная точка окружности спроектирована на эти перпендикуляры. Найти расстояние между проекциями точки.

13. Хорда пересекает диаметр под углом 30° и делит его на два отрезка в 2 см и 6 см. Найти расстояние хорды от центра.

14. Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, которые удалены от центра на 6 см и на 10 см. Определить их длину.

15. Концы диаметра удалены от касательной на 1,6 м и на 0,6 м. Определить длину диаметра.

16. В круге с центром O проведена хорда AB и продолжена на расстояние BC , равное радиусу. Через точку C и центр O проведена секущая CD (D —точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Доказать, что угол AOD равен утроенному углу ACD .

17. 1) Дан круг, радиус которого равен 2 см. Провести в нем хорду длиной в 1,5 см. Определенная ли эта задача? Сколько решений будет иметь задача, если хорда данной длины должна проходить через данную точку окружности?

2) Показать, что середины всех хорд данной длины, проведенных в данной окружности, лежат на некоторой другой окружности.

18. 1) Доказать, что из всех хорд, проходящих через точку A , взятую внутри круга, наименьшей будет та, которая перпендикулярна к диаметру, проходящему через A .

2) Через данную в круге точку провести хорду, которая делилась бы этой точкой пополам.

19. Описать окружность с центром в данной точке на стороне данного угла, которая на другой стороне угла отсекала бы хорду данной длины.

20. В данном круге проведены две равные параллельные между собой хорды, расстояние между которыми равно радиусу данного круга. Найти острый угол между прямыми, соединяющими концы хорд.

Касательная. Сопряжение прямых и окружностей

21. 1) Из внешней точки проведены к кругу две взаимно перпендикулярные касательные; радиус круга $R=10$ см. Найти длину каждой касательной.

2) Дан круг радиуса $R=1$ дм; из внешней точки M к нему проведены две взаимно перпендикулярные касательные MA и MB (рис. 16). Между точками касания A и B на дуге AB взята произвольная точка C , и через нее проведена третья касательная KL , образующая с касательными MA и MB треугольник KLM . Найти периметр этого треугольника.

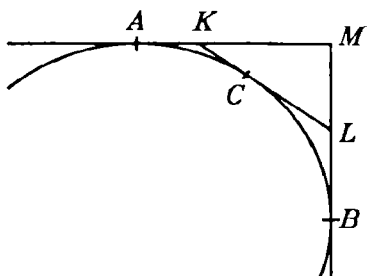


Рис. 16.

22. Дан сектор, равный четверти круга радиуса R . Определить длину касательной, проведенной в середине его дуги до пересечения с продолжениями крайних радиусов сектора.

23. В прямой угол вписан круг; хорда, соединяющая точки касания, равна 2 дм. Найти расстояние этой хорды от центра круга.

24. AB и AC — касательные к одной окружности; $\angle BAC$ равен 60° ; ломаная линия BAC равна 1 м. Определить расстояние между точками касания B и C .

25. Окружность круга равна 18,84 см; круг катится по прямой AB (рис. 17). На сколько передвинется центр круга, если круг из положения I перейдет в положение II? В положении I хорда $CD \parallel AB$, а в положении II хорда $C_1D_1 \perp AB$.

26. Окружность круга равна $18,84$ см. Круг катится по прямой AB ; на сколько передвинется его центр O , если хорда его из первоначального положения $CD \parallel AB$ перейдет в положение $C_1D_1 \parallel AB$ (рис. 18)?

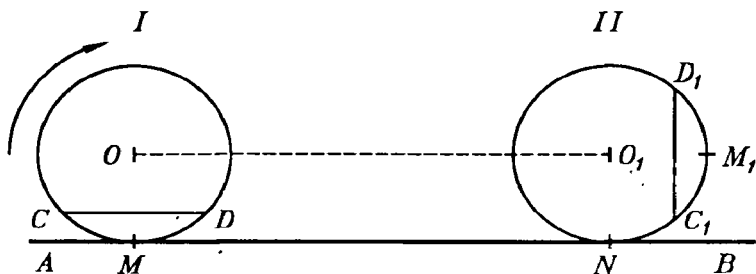


Рис. 17.

27. Радиусы двух кругов равны 2 см и 4 см; их общие внутренние касательные взаимно перпендикулярны. Найти длину каждой из них.

28. Даны два круга, их общие внутренние касательные взаимно перпендикулярны; хорды, соединяющие точки касания, равны 3 см и 5 см. Определить расстояние между центрами.

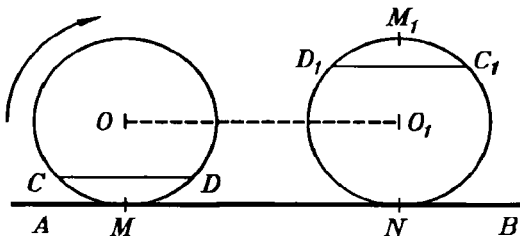


Рис. 18.

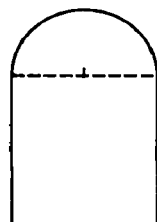


Рис. 19.

29. Даны два круга радиусов R и r , один вне другого; к ним проведены две общие внешние касательные. Найти их длину (между точками касания), если их продолжения образуют прямой угол ($R > r$).

30. Дан угол в 30° . Построить окружность радиуса $2,5$ см, касающуюся одной стороны этого угла и имеющую центр на другой его стороне. Вычислить расстояние центра окружности от вершины угла.

31. Начертить выпуклую фигуру из двух параллельных прямых, сопрягаемых полуокружностью. Такая фигура на-

зывается в архитектуре «валиком», если диаметр полуокружности вертикален, и «аркой», если горизонтален (рис. 19).

32. Соединить две непараллельные прямые сопрягающей их дугой. Рассмотреть три случая: 1) когда точки соединения (точки касания) и радиус дуги не даны; 2) когда дан только радиус дуги; 3) когда дана точка соединения, а радиус не дан (примеры такого соединения прямых дугами представляют закругления железнодорожного пути).

33. Найти геометрическое место центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной прямой.

34. Данным радиусом описать окружность, которая касалась бы данной прямой в данной точке.

35. Описать окружность, которая проходила бы через данную точку A и касалась бы данной прямой в данной на ней точке B .

36. Описать окружность, которая касалась бы сторон данного угла, причем одной из них — в данной точке.

37. Между двумя параллельными прямыми дана точка. Провести окружность, проходящую через эту точку и касающуюся данных прямых.

38. Даны две параллельные прямые и секущая. Провести окружность, касающуюся всех трех прямых.

39. Данным радиусом описать окружность, проходящую через данную точку и касательную к данной прямой.

40. Две прямые исходят из одной и той же точки M и касаются окружности в точках A и B . Проведя радиус OB , продолжают его за точку B на расстоянии $BC=OB$. Доказать, что $\angle AMC=3\angle BMC$.

Относительное положение двух окружностей

41. Какое относительное положение занимают две окружности, если:

- 1) расстояние между центрами 10 см, а радиусы 8 см и 2 см;
- 2) расстояние между центрами 4 см, а радиусы 11 см и 7 см;
- 3) расстояние между центрами 12 см, а радиусы 5 см и 3 см?

42. Радиусы двух окружностей относятся, как 5:3; при внутреннем их касании расстояние между центрами равно 6 дм. Узнать относительное положение тех же окружностей,

если расстояние между центрами будет: 1) 24 дм; 2) 5 дм; 3) 28 дм; 4) 20 дм.

43. Даны два круга — один внутри другого; через их центры проведен в большом круге диаметр, который окружностью меньшего круга делится на три части: 5 см, 8 см, 1 см. Найти расстояние между центрами.

44. Наименьшее расстояние между двумя концентрическими окружностями равно 2 см, а наибольшее 16 см. Определить радиусы этих окружностей.

45. Даны два концентрических круга; в большом круге даны взаимно перпендикулярные хорды, касательные к меньшему; каждая из хорд делится другой на две части: 3 см и 7 см. Найти радиус меньшего круга.

46. Радиусы двух концентрических окружностей относятся, как 7:4, а ширина кольца равна 12 см. Определить радиус меньшей окружности.

47. Если пересечь два концентрических круга секущей, то части секущей, лежащие между окружностями, равны между собой. Доказать.

48. Одна окружность находится внутри другой; радиусы их равны 28 см и 12 см, а кратчайшее расстояние между ними равно 10 см. Определить расстояние между центрами.

49. 1) Три равных круга радиуса R касаются друг друга извне. Определить стороны и углы треугольника, вершинами которого служат точки касания.

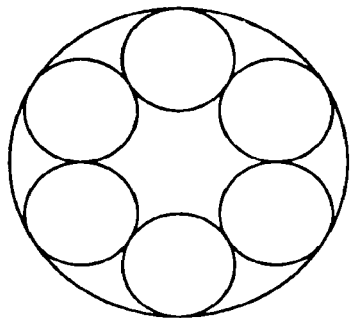


Рис. 20.

2) Вписать в данный круг три равных круга, которые касались бы попарно между собой и данного круга.

50. Два равных круга внутренне касаются третьего круга и касаются между собой. Соединив три центра, получим треугольник с периметром в 18 см. Определить радиус большого круга.

51. В данный круг, радиус которого равен 3 дм, вписано шесть равных кругов (рис. 20), из которых каждый касается данного круга и двух соседних кругов. Найти их диаметры. Сделать чертеж.

52. Около круга радиуса 1 дм проведены с наружной стороны шесть равных кругов, из которых каждый касается данного круга и двух соседних. Найти их радиусы. Сделать чертеж.

Построение окружностей и дуг

53. 1) Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности в данной на ней точке.

2) Провести окружность, которая проходила бы через данную точку и касалась бы данной окружности в данной точке.

54. 1) Найти геометрическое место центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной окружности.

2) Данным радиусом провести окружность, которая касалась бы данной прямой и данного круга.

55. Соединить данную прямую и данную дугу сопрягающей дугой данного радиуса; точки соединения (точки касания) не даны.

56. Соединить две данные дуги сопрягающей дугой данного радиуса; точки касания не даны.

57. Описать окружность, которая касалась бы двух данных параллельных прямых и круга, находящегося между ними.

58. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую так, чтобы часть ее, заключенная внутри окружностей, имела данную длину.

§ 7. Измерение углов дугами

Центральный угол

1. 1) Большое колесо зубчатой передачи имеет 72 зубца. Сколько градусов окружности колеса занимает один зубец колеса вместе со впадиной?

2) Меньшее колесо зубчатой передачи имеет 24 зубца. Сколько градусов содержит дуга, занимаемая одним зубцом колеса вместе со впадиной?

3) Какую часть оборота сделает большее колесо с 72 зубцами, когда сцепленное с ним, меньшее, имеющее 24 зубца, сделает один полный оборот?

2. Выразить в градусах, минутах и секундах следующие части окружности: 1) $\frac{1}{72}$; 2) $\frac{1}{81}$; 3) 0,001; 4) $\frac{1}{14}$; 5) $\frac{5}{11}$.

3. Найти, какую часть окружности составляют дуги: 1) 15° ; 2) $22^\circ 30'$; 3) 108° ; 4) $24'$; 5) $18''$; 6) $18^\circ 45'$; 7) $2^\circ 30''$; 8) $10^\circ 40''$.

4. Определить угол между стрелками на часах, когда часы показывают: 1) 5 ч; 2) 3 ч 25 мин; 3) 4 ч 50 мин.

5. Хорда стягивает дугу в 90° и равна 16 см. Определить ее расстояние от центра.

6. В окружности, радиус которой 1,4 м, определить расстояние от центра до хорды, стягивающей дугу в 120° .

7. Угол между двумя радиусами содержит $102^\circ 37''$. Определить угол между касательными, проведенными через концы этих радиусов.

8. Дуга AB содержит $73^\circ 27'$; из ее конца B проведена касательная до встречи в точке C с продолжением радиуса OA . Определить $\angle ACB$.

Вписанный угол

9. Сколько градусов и минут содержит дуга, если ее радиус, проведенный в конец ее, составляет с ее хордой угол в $37^\circ 23'$?

10. Дуга содержит $117^\circ 23'$. Определить угол между хордой и продолжением радиуса, проведенного в конец дуги.

11. ABC — секущая; BD — хорда; $\cup BD$ содержит 43° ; $\cup BDC$ содержит $213^\circ 41'$. Определить $\angle ABD$.

12. Вычислить угол, вписанный в дугу, составляющую $\frac{17}{32}$ окружности.

13. Сколько градусов и минут содержит дуга, которая вмещает угол, равный $37^\circ 21'$?

14. Дуга содержит $84^\circ 52'$. Под каким углом из точек этой дуги видна ее хорда?

15. Хорда делит окружность в отношении 5:11. Определить величину вписанных углов, опирающихся на эту хорду.

16. AB и AC — две хорды: $\cup AB$ содержит $110^\circ 23'$; $\cup AC$ содержит 38° . Определить $\angle BAC$. (Два ответа.)

17. Хорда AB делит окружность на две дуги, из которых меньшая равна 130° , а большая делится хордой AC в отношении $31:15$ (начиная от A). Определить $\angle BAC$.

18. Хорды AB и AC лежат по разные стороны центра и заключают $\angle BAC$, равный $72^\circ 30'$; $\cup AB:\cup AC=19:24$. Определить эти дуги.

19. Окружность разделена в отношении $7:11:6$, и точки деления соединены между собой. Определить углы полученного треугольника.

20. Определить, сколько градусов содержит дуга, если перпендикуляр, проведенный к хорде из ее конца, делит дополнительную (до окружности) дугу в отношении $5:2$.

21. Если в треугольнике медиана равна половине соответствующей стороны, то угол против этой стороны прямой. Доказать это с помощью вспомогательной окружности.

22. Точки A и B соединены двумя дугами, обращенными выпуклостями в разные стороны: $\cup ACB$ содержит $117^\circ 23'$ и $\cup ADB$ содержит $42^\circ 37'$; середины их C и D соединены с A . Определить $\angle CAD$.

23. Доказать, что всякая трапеция, вписанная в круг, — равнобокая.

24. В сегмент AMB вписана трапеция $ACDB$, у которой сторона $AC=CD$ и $\angle CAB=51^\circ 20'$. Сколько градусов содержит дуга AMB ?

25. AB — диаметр; C ; D и E — точки на одной полуокружности $ACDEB$. На диаметре AB взяты: точка F так, что $\angle CFA=\angle DFB$, и точка G так, что $\angle DGA=\angle EGB$. Определить $\angle FDG$, если $\cup AC$ содержит 60° и $\cup BE$ содержит 20° .

26. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 40° . Одна из сторон служит диаметром полуокружности, которая делится другими сторонами на три части (рис. 21). Найти эти части.

27. Основание равностороннего треугольника служит диаметром окружности.

На какие части делятся стороны треугольника полуокружностью и полуокружность — сторонами треугольника?

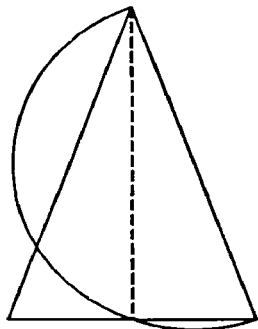


Рис. 21.

28. Построить несколько точек окружности, имеющей данный диаметр, пользуясь лишь чертежным треугольником.

29. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе $c = 5$ см и высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу и имеющей длину 2 см.

30. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе, равной 3,5 см, и проекции одного из катетов на гипотенузу, если эта проекция равна 2,9 см.

31. Найти геометрическое место середин всех хорд, пересекающихся в одной точке. Рассмотреть два случая: 1) точка на окружности; 2) точка внутри окружности.

32. Через точку касания двух окружностей проведена секущая. Радиусы и касательные, проведенные через концы образовавшихся хорд, параллельны. Доказать.

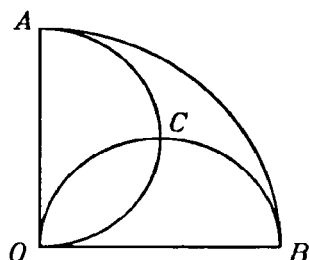


Рис. 22.

33. На радиусах OA и OB четверти круга AOB построены (как на диаметрах) полуокружности ACO и OCB (рис. 22). Доказать, что: 1) прямая OC делит угол AOB пополам; 2) точки A , C и B лежат на одной прямой; 3) дуги AC , CO и CB равны между собой.

34. Через конец хорды, делящей окружность в отношении 3:5, проведена касательная. Определить острый угол между хордой и касательной.

35. AB и AC — равные хорды, MAN — касательная; $\cup BC$, на которой не лежит точка A , содержит $213^\circ 42'$. Определить углы MAB и NAC .

36. C — точка на продолжении диаметра AB ; CD — касательная; $\angle ADC = 114^\circ 25'$. Сколько градусов и минут содержит $\cup BD$?

37. AB — диаметр окружности; BC — касательная. Секущая AC делится окружностью (в точке D) пополам. Определить $\angle DAB$.

38. M — середина высоты BD в равнобедренном треугольнике ABC ; точка M служит центром дуги, описанной радиусом MD между сторонами BA и BC . Определить градусную величину этой дуги, если известно, что $\angle BAC = 62^\circ 17'$.

**Угол с вершиной внутри круга и вне круга.
Описанный угол**

39. Окружность разделена точками A, B, C и D так, что $\cup AB : \cup BC : \cup CD : \cup DA = 2:3:5:6$. Проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке M . Определить $\angle AMB$.

40. Диаметр AB и хорда CD пересекаются в точке M ; $\angle CMB = 73^\circ$; $\cup BC$ содержит 110° . Сколько градусов содержит $\cup BD$?

41. Хорды AB и CD пересекаются в точке M ; $\angle AMC = 40^\circ$; $\cup AD$ более $\cup BC$ на $20^\circ 54'$. Определить $\cup AD$.

42. Из концов $\cup AB$, содержащей m° , проведены хорды AC и BD так, что $\angle DMC$, образуемый их пересечением, равен $\angle DNC$, вписанному в $\cup CD$. Определить эту дугу.

43. В четырехугольнике $ABCD$ углы B и D — прямые; диагональ AC образует со стороной AB угол в 40° , а со стороной AD — угол в 30° . Определить острый угол между диагоналями AC и BD .

44. Окружность разделена точками A, B, C и D так, что $\cup AB : \cup BC : \cup CD : \cup DA = 3:2:13:7$. Хорды AD и BC продолжены до пересечения в точке M . Определить $\angle AMB$.

45. Дана окружность с хордой и касательной, причем точка касания лежит на меньшей из двух дуг, стягиваемых хордой. Найти на касательной точку, из которой хорда видна под наибольшим углом.

46. Секущая ABC отсекает $\cup BC$, содержащую 112° ; касательная AD точкой касания D делит эту дугу в отношении $7:9$. Определить $\angle BAD$.

Указание (для некоторых следующих задач). Определяя описанный угол, полезно помнить следующее: тот угол между двумя касательными, внутри которого заключена окружность, служит дополнением до 180° к углу между радиусами, проведенными в точке касания.

47. Из концов дуги в $200^\circ 30'$ проведены касательные до взаимного пересечения. Определить угол между ними.

48. Описанный угол содержит $73^\circ 25'$. Определить дуги, заключенные между его сторонами.

49. Хорда делит окружность в отношении $11:16$. Определить угол между касательными, проведенными из концов этой хорды.

50. Внутри данной окружности (рис. 23) помещается другая окружность. ABC и ADE — хорды большей окружности, касающиеся в точках B и D меньшей окружности; BMD — меньшая из дуг между точками касания; CNE — дуга между концами хорд. Определить $\angle CNE$, если $\angle BMD$ содержит 130° .

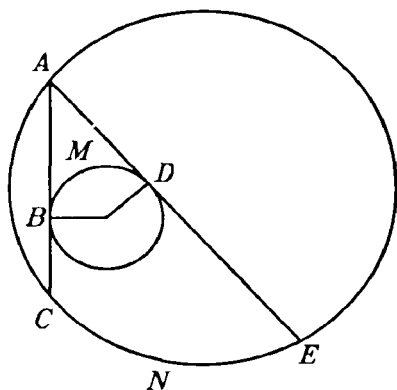


Рис. 23.

51. Внутри данной окружности (рис. 24) находится другая окружность, CAE и DBF — две хорды большей окружности (не пересекающиеся), касающиеся меньшей окружности в точках A и B ; AMB — меньшая из дуг между точками касания; CND и EPF — дуги между концами хорд. Сколько градусов содержит $\angle CND$, если $\angle AMB$ содержит 154° и $\angle EPF = 70^\circ$?

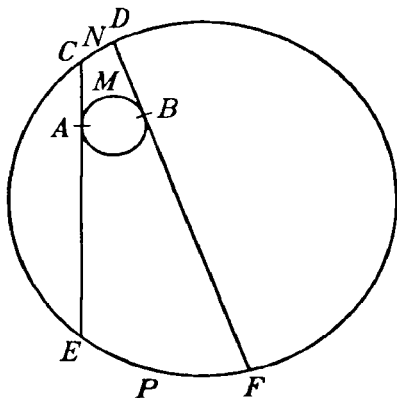


Рис. 24.

52. Окружность разделена в отношении $5:9:10$, и через точки деления проведены касательные. Определить больший угол в полученном треугольнике.

53. AB и AC — две хорды, образующие $\angle BAC$ в $72^\circ 24'$. Через точки B и C проведены касательные до пересечения в точке M . Определить $\angle BMC$.

54. Определить величину описанного угла, если расстояние (кратчайшее) от его вершины до окружности равно радиусу.

55. Дуга AB содержит $40^\circ 24'$. На продолжении радиуса OA отложена часть AC , равная хорде AB , и точка C соединена с B . Определить $\angle ACB$.

56. В треугольнике ABC угол C — прямой. Из центра C радиусом AC описана $\odot ADE$, пересекающая гипотенузу в точ-

ке D , а катет CB — в точке E . Определить дуги AD и DE , если $\angle B = 37^\circ 24'$.

Сегмент, вмещающий данный угол

57. Треугольники ABC и ADC имеют общую сторону AC ; стороны AD и BC пересекаются в точке M . Углы B и D равны между собой и содержат по 40° . Расстояние между вершинами B и D равно стороне AB ; $\angle AMC = 70^\circ$. Определить углы треугольников ABC и ADC .

58. На данной прямой MN найти точку, из которой данный отрезок AB был бы виден под данным углом.

59. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и высоте.

60. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и медиане, проведенной к основанию.

61. Даны по величине и положению два отрезка: a и b . Найти такую точку, из которой отрезок a был бы виден под данным углом A , отрезок b — под данным углом B .

62. Построить параллелограмм по его углу и диагоналям.

Вписанный и описанный треугольники

63. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4 м. Определить радиус описанной окружности.

64. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2 см; угол при вершине равен 120° . Определить диаметр описанной окружности.

65. Пусть будет O —центр круга, описанного около треугольника ABC . Определить $\angle OAC$: 1) если $\angle B = 50^\circ$; 2) если $\angle B = 126^\circ$.

66. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 25° . Под каким углом виден каждый его катет из центра описанной окружности?

67. Два угла треугольника равны 100° и 50° . Под каким углом видна каждая сторона треугольника из центра вписанной окружности?

68. Треугольник ABC — равнобедренный; радиус описанного круга OA образует с основанием AC угол OAC , равный $20^\circ 38'$. Определить $\angle BAC$. (Два случая.)

69. Построить равнобедренный треугольник по основанию и радиусу вписанного круга.

70. В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания вписанного круга в отношении 7:5 (начиная от вершины). Найти отношение боковой стороны к основанию.

71. В прямоугольном равнобедренном треугольнике обозначим радиус вписанного круга через r , а половину периметра через p . Требуется определить гипотенузу.

72. Около данного круга описать равнобедренный прямоугольный треугольник.

73. Около круга, радиус которого равен 4 см, описан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 26 см. Найти периметр треугольника.

74. В данный круг вписать треугольник, у которого даны два угла.

75. Около данного круга описать треугольник, у которого даны два угла.

Вписанный и описанный четырехугольники

76. Меньшая сторона прямоугольника равна 1 м; острый угол между диагоналями равен 60° . Найти радиус описанного круга.

77. В прямоугольнике диагональ образует со стороной угол в $12^\circ 35'$. На какие четыре части делится вершинами этого прямоугольника описанная около него окружность?

78. Вписать круг в данный ромб.

79. Сторона ромба равна 8 см; острый угол его содержит 30° . Определить радиус вписанного круга.

80. В ромб вписана окружность. На какие четыре части она делится точками касания сторон, если острый угол ромба равен 37° ?

81. В равнобедренной трапеции угол при основании равен 50° , а угол между диагоналями, обращенный к боковой стороне, равен 40° . Где лежит центр описанной окружности: внутри или вне трапеции?

82. Около круга описана трапеция, периметр которой равен 12 см. Определить среднюю линию этой трапеции.

83. Около круга описана равнобедренная трапеция с углом 30° . Средняя линия ее равна 1 м. Определить радиус круга.

84. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна к диагонали BD и делит ее пополам. Определить углы этого четырехугольника, если $\angle BAD = 70^\circ 23' 42''$.

85. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого по порядку относятся: 1) как $2:4:5:3$; 2) как $5:7:8:9$?

86. Центральный угол сектора равен 60° , а радиус равен R . Определить радиус круга, вписанного в этот сектор.

87. В четырехугольнике $ABCD$ дано: $\angle ABC = 116^\circ$; $\angle ADC = 64^\circ$; $\angle CAB = 35^\circ$ и $\angle CAD = 52^\circ$. Определить угол между диагоналями, опирающийся на сторону AB .

88. 1) Три стороны описанного четырехугольника относятся (в последовательном порядке), как $1:2:3$. Определить стороны, если известно, что периметр его равен 24 м.

2) Три угла вписанного четырехугольника (в последовательном порядке) относятся, как $1:2:3$. Определить углы четырехугольника.

§ 8. Свойство биссектрисы в треугольнике

1. BD — биссектриса угла B в треугольнике ABC . Требуется определить:

1) отрезки AD и DC , если $AB = 10$ м, $BC = 15$ м и $AC = 20$ м;

2) сторону BC , если $AD:DC = 8:5$ и $AB = 16$ м;

3) сторону AC , если $AB:BC = 2:7$ и $DC - AD = 1$ м.

2. Угол треугольника, заключенный между сторонами в 9 см и 6 см, разделен пополам. Один из отрезков третьей стороны оказался равным одной из данных сторон. Определить третью сторону.

3. D — точка на стороне BC в треугольнике ABC . Уз-
нать, делит ли прямая AD угол A пополам:

1) если $AB = 12$ см, $AC = 15$ см, $BD = 8$ см и $DC = 10$ см;

2) если $AB = 12$ м, $AC = 56$ м и $BD:DC = 14:3$;

3) если $AB = \frac{5}{11} AC$, $BD = 2$ м и $DC = 4,5$ м;

4) если $AB = 6$ м, $AC = 28$ м и $BD = \frac{3}{17} BC$.

4. В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что вершины D , E и F лежат соответственно на сторонах AB , BC и AC . Определить отрезки BE и EC , если $AB=14$ см, $BC=12$ см и $AC=10$ см.

5. Стороны треугольника равны 51 см, 85 см и 104 см. Проведена окружность, которая касается обеих меньших сторон, а центр имеет на большей стороне. На какие части бо́льшая сторона делится центром?

6. В равнобедренном треугольнике высота равна 20 см, а основание относится к боковой стороне как 4:3. Определить радиус вписанного круга.

7. В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 12:5, а боковая сторона равна 60 см. Определить основание.

8. В равнобедренном треугольнике радиус вписанного круга составляет $\frac{2}{7}$ высоты, а периметр этого треугольника равен 56 см. Определить его стороны.

9. Хорда $AB=15$ м, хорда $AC=21$ м и хорда $BC=24$ м. Точка D — середина дуги CB . На какие части BE и EC делится хорда BC прямой AED ?

10. В треугольнике ABC даны стороны a , b и c . BD — биссектриса угла B ; O — точка пересечения BD и биссектрисы угла C . Требуется определить отношение $OD:OB$.

11. В треугольнике ABC сторона $AB=15$ см и $AC=10$ см; AD — биссектриса угла A ; из точки D проведена прямая, параллельная AB , до пересечения с AC в точке E . Определить AE , EC и DE .

12. В равнобедренном треугольнике ABC сторона $AC=b$; сторона $BA=BC=a$; AN и CM — биссектрисы углов A и C . Определить длину MN .

§9. Подобие треугольников и многоугольников

Подобные треугольники

1. Стороны треугольника относятся, как 4:5:6; меньшая сторона подобного ему треугольника равна 0,8 м. Определить другие стороны подобного ему треугольника.

2. Стороны треугольника относятся, как 2:5:4; периметр подобного ему треугольника равен 55 м. Определить стороны второго треугольника.

3. Длина тени, отбрасываемой фабричной трубой, равняется 35,8 м; в то же время вертикально воткнутый в землю кол длиной в 1,9 м дает тень длиной в 1,62 м. Найти высоту трубы.

4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано, что $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$. Решить для этих треугольников следующие задачи:

1) дано: $a=10$; $b=14$; $a_1=25$; $c_1=20$. Определить c и b_1 ;

2) дано: $a=35$; $a_1=21$; $c-c_1=8$. Определить c .

5. В треугольниках ABC и DEF $\angle A = \angle E$ и $\angle B = \angle D$. Сторона $AB=16$ см; $BC=20$ см; $DE=12$ см; $AC-EF=6$ см. Определить AC , EF и DF .

6. В двух равнобедренных треугольниках углы при вершине равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны 17 см и 10 см; основание другого равно 8 см. Определить его боковую сторону.

7. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано, что $\angle B = \angle B_1$ и что стороны первого треугольника, заключающие угол B , в 2,5 раза больше сторон второго треугольника, заключающих угол B_1 . Определить AC и A_1C_1 , если их сумма равна 4,2 м.

8. В треугольниках ABC и DEF имеется: $\angle B = \angle D$, $AB = \frac{4}{3}DE$ и $DF = 0,75BC$. Определить AC и EF , если их разность равна 5 см.

9. Узнать, подобны ли треугольники, если стороны их таковы:

1) 1 м, 1,5 м и 2 м; 10 см, 15 см и 20 см;

2) 1 м, 2 м и 15 дм; 12 дм, 8 дм и 16 дм;

3) 1 м, 2 м и 1,25 м; 10 см, 9 см и 16 см.

10. 1) В $\triangle ABC$ сторона $AB=15$ м и $AC=20$ м; на стороне AB отложена часть $AD=10$ м, а на стороне AC — часть $AE=12$ м. Подобны ли треугольники ABC и ADE ?

2) В предыдущей задаче, сохранив длину сторон AB и AC , взять $AD=9$ м и $AE=12$ м. Будут ли тогда подобны треугольники ABC и ADE ?

11. AB — диаметр одной окружности; AC — хорда. Описана другая окружность на диаметре DE , равном $\frac{13}{17}AB$, и в ней проведена хорда DF , равная $\frac{13}{17}AC$. Определить EF , если известно, что $BC=3,4$ м.

12. 1) Стороны одного треугольника равны 0,8 м, 1,6 м и 2 м; периметр подобного ему треугольника равен 5,5 м. Определить стороны второго треугольника.

2) Периметр одного треугольника составляет $\frac{11}{13}$ периметра подобного ему треугольника. Разность двух сходственных сторон равна 1 м. Определить эти стороны.

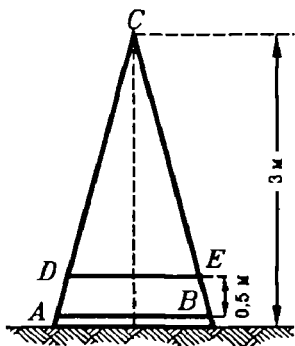


Рис. 25.

13. При устройстве мостов на козловых устоях (рис. 25) для лучшего распределения давления веса моста на грунт к подошвам ног козел A и B прибивают доску AB , а ноги каждой пары связывают схваткой DE . Найти длину схватки DE , если известно, что высота козел $h=3$ м, длина доски $AB=1,5$ м, а также, что схватка укрепляется на расстоянии $0,5$ м от доски AB .

14. Дан треугольник ABC и внутри него отрезок DE , параллельный AC (D на AB , E на BC). Определить сторону DE :

1) если $AC=20$ см, $AB=17$ см и $BD=11,9$ см;

2) если $AC=18$ дм, $AB=15$ дм и $AD=1$ м.

15. Дан треугольник ABC и внутри него отрезок DE , параллельный AC (D на AB и E на BC). Требуется:

1) определить AD , если $AB=16$ см, $AC=2$ дм и $DE=15$ см;

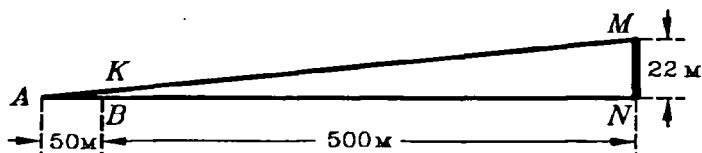
2) определить отношение $AD:BD$, если известно, что $AC:DE=\frac{5}{7}:\frac{4}{11}$.

16. Открытый участок дороги находится в полосе AB шириной в 50 м (рис. 26); неприятельский наблюдательный пункт находится на верху колокольни высотой $MN=22$ м. Какой высоты следует сделать вертикальную маску KB на расстоянии 500 м от колокольни, чтобы закрыть дорогу от наблюдателя противника?

17. В треугольнике ABC , стороны которого a , b и c даны, проведена параллельно AC прямая MN так, что $AM=BN$. Определить MN .

18. В треугольнике ABC проведена прямая BD так, что $\angle BDC=\angle ABC$, на стороне AC получаются отрезки $AD=7$ см и $DC=9$ см. Определить сторону BC и отношение $BD:BA$.

19. В треугольнике ABC проведена прямая BD так, что $\angle ABD = \angle BCA$. Определить отрезки AD и DC , если $AB=2$ м и $AC=4$ м.



20. Построить треугольник, подобный данному, периметр которого равняется данной длине.

21. Построить треугольник: по углу, одной из сторон, прилежащих к нему, и отношению этой стороны к третьей стороне.

22. Построить треугольник по высоте, углу при вершине и отношению отрезков основания.



Рис. 26.

Пропорциональные отрезки в трапеции и параллелограмме

23. $ABCD$ — данная трапеция, причем $BC \parallel AD$; O — точка пересечения диагоналей; $AO=8$ см, $OC=1$ дм и $BD=27$ см. Определить OB и OD .

24. Дана трапеция $ABCD$, причем стороны BC и AD параллельны; O — точка пересечения диагоналей; $BO : OD = 0,3 : \frac{2}{3}$; средняя линия трапеции равна 29 см. Определить основания и отношение $AO : OC$.

25. В трапеции $ABCD$ (где $BC \parallel AD$) с диагональю BD углы ABD и BCD равны. Дано: $BC=10$ см, $DC=15$ см и $BD=20$ см. Определить AB и AD .

26. В трапеции $ABCD$ с диагональю AC углы ABC и ACD равны. Определить диагональ AC , если основания BC и AD соответственно равны 12 см и 27 см.

27. Основания трапеции относятся, как 5:9, а одна из боковых сторон равна 16 см. На сколько надо ее продолжить,

чтобы она встретилась с продолжением другой боковой стороны?

28. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB=420$ м. На стороне BC взята точка E так, что $BE:EC=5:7$, и проведена прямая DE , пересекающая продолжение AB в точке F . Требуется определить BF .

29. $ABCD$ — данный параллелограмм; F — точка на продолжении стороны AB ; E — точка пересечения DF и AC . Определить BF , если $AE:EC=m:n$ и $AB=a$.

30. $ABCD$ — данный параллелограмм. Через точку пересечения его диагоналей проведена перпендикулярная к BC прямая, которая пересекает BC в точке E , а продолжение AB — в точке F . Определить BE , если $AB=a$, $BC=b$ и $BF=c$.

Разные задачи

31. В треугольник вписан параллелограмм, угол которого совпадает с углом треугольника. Стороны треугольника, заключающие этот угол, равны 20 см и 25 см, а параллельные им стороны параллелограмма относятся, как 6:5. Определить стороны параллелограмма.

32. В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что угол A у них общий, а вершина E находится на стороне BC . Определить сторону ромба, если $AB=c$ и $AC=b$.

33. Прямая, проведенная через вершину ромба вне его, отсекает на продолжениях двух сторон отрезки p и q . Определить сторону ромба.

34. Вписать квадрат в данный сегмент так, чтобы одна его сторона лежала на хорде, а концы противоположной стороны — на дуге.

35. Вписать квадрат в данный треугольник так, чтобы одна его сторона лежала на стороне треугольника, а вершины противоположащих углов — на двух других сторонах треугольника.

36. В треугольник с основанием a и высотой h вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а другие две — на боковых сторонах. Вычислить сторону квадрата.

37. В данный треугольник вписать прямоугольник, у которого стороны относились бы, как $m:n$.

38. В треугольник, основание которого равно 48 см, а высота 16 см, вписан прямоугольник с отношением сторон 5:9, причем большая сторона лежит на основании треугольника. Определить стороны прямоугольника.

39. В треугольник, у которого основание равно 30 см, а высота 10 см, вписан прямоугольный равнобедренный треугольник так, что его гипотенуза параллельна основанию данного треугольника, а вершина прямого угла лежит на этом основании. Определить гипотенузу.

40. В треугольник вписан полукруг, у которого полуокружность касается основания, а диаметр (с концами на боковых сторонах треугольника) параллелен основанию. Определить радиус, если основание треугольника равно a , а высота h .

41. В треугольнике ABC угол C прямой; $AC=6$ см, $BC=12$ см. На стороне BC взята точка D так, что $\angle ADC=90^\circ - \angle B$. На какие части точка D делит сторону BC ?

42. В треугольнике ABC даны две стороны: $BC=16$ м и $AC=12$ м и сумма соответствующих высот $AD+BE=14$ м. Определить AD и BE .

43. Стороны параллелограмма равны 2 м и 16 дм; расстояние между большими сторонами равно 8 дм. Определить расстояние между меньшими сторонами.

44. Периметр параллелограмма равен 48 см, а его высоты относятся, как 5:7. Определить соответствующие им стороны.

45. Определить длину хорды, если дан радиус r и расстояние a от одного конца хорды до касательной, проведенной через другой ее конец.

46. Две окружности внешне касаются. Прямая, проведенная через точку касания, образует в окружностях хорды, из которых одна равна $\frac{13}{5}$ другой. Определить радиусы, если расстояние между центрами равно 36 см.

47. ABC — данный треугольник; CD — биссектриса угла C ; точка E лежит на BC , причем $DE \parallel AC$. Определить DE , если $BC=a$ и $AC=b$.

48. ABC — данный треугольник; BD — высота; AE — биссектриса угла A ; EF — перпендикуляр на AC . Определить EF , если $BD=30$ см и $AB : AC=7:8$.

49. В параллелограмм вписан ромб так, что его стороны параллельны диагоналям параллелограмма. Определить сторону ромба, если диагонали параллелограмма равны l и m .

50. Четыре параллели, между которыми последовательные расстояния относятся, считая сверху, как $2:3:4$, пересечены двумя сходящимися над ними прямыми. Из полученных четырех параллельных отрезков крайние равны 60 дм и 96 дм. Определить средние отрезки.

51. В треугольнике ABC проведен от BA к BC отрезок DE , параллельный AC . Дано: $AB=24$ м, $BC=32$ м, $AC=28$ м и $AD+CE=16$ м. Требуется определить DE .

52. AD и BE — высоты треугольника ABC , пересекающиеся в точке O . Дано: $AD+BE=35$ дм, $AO=9$ дм и $BO=12$ дм. Требуется определить OD и OE .

53. В равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна 100 дм, а основание 60 дм, вписан круг. Определить расстояние между точками касания, находящимися на боковых сторонах.

54. Радиус сектора равен r , а хорда его дуги равна a . Определить радиус круга, вписанного в этот сектор.

Подобные многоугольники

55. Стороны одного пятиугольника равны 35 см, 14 см, 28 см, 21 см и 42 см. Меньшая сторона подобного ему пятиугольника равна 12 см. Определить остальные стороны его.

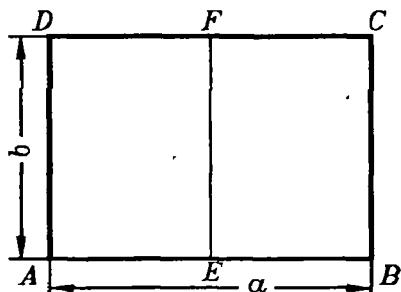


Рис. 27.

56. Стороны одного четырехугольника относятся между собой, как $1:\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:2$; периметр подобного ему четырехугольника равен 75 м. Определить стороны второго четырехугольника.

57. Стороны одного четырехугольника равны 10 дм, 15 дм, 20 дм и 25 дм; в подобном ему четырехугольнике

сумма наибольшей и наименьшей сторон равна 28 дм. Определить стороны второго четырехугольника.

58. Наибольшие стороны двух подобных многоугольников равны 35 м и 14 м, а разность их периметров равна 60 м. Определить периметры.

59. Завод, изготавливающий цементные плиты для пола, установил у себя нормальную форму (стандарт) для прямоугольных плит такую, чтобы половина $BCFE$ плиты была подобна целой плите $ABCD$. Найти отношение сторон таких плит (рис. 27).

60. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB=a$ и $BC=b$. Прямая EF отсекает параллелограмм $ABEF$, подобный $ABCD$. Определить отрезок BE .

§ 10. Числовая зависимость между линейными элементами треугольников и некоторых четырехугольников¹

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

1. Вычислить гипотенузу, если даны оба катета: 1) 12 см и 35 см; 2) 56 см и 33 см; 3) 4 м и 9 дм; 4) 60 см и 91 см; 5) 21 и $3\frac{1}{4}$; 6) $\frac{3}{2}$ и $\frac{7}{16}$; 7) 16,8 и 2,6; 8) 5 и 6.

2. Вычислить второй катет, если даны гипотенуза и первый катет²:

- 1) 289 и 240; 2) 269 и 69; 3) 145 и 143; 4) 42,5 и 6,5;
5) 17 и $15\frac{2}{5}$; 6) 10 и 7.

3. По двум данным элементам прямоугольного треугольника вычислить остальные четыре:

- 1) $a=15$, $b=20$; 2) $a=24$, $b=7$; 3) $a=4$, $b=5$;
4) $a=100$, $c=125$; 5) $b=65$, $c=169$; 6) $a=600$, $c=625$;
7) $a=6$, $a_c=3,6$; 8) $b=7$; $b_c=1,96$;
9) $c=29$, $a_c=15\frac{6}{29}$; 10) $c=3$, $b_c=2$;

¹ В прямоугольном треугольнике обозначают: a и b — катеты; c — гипотенуза; a_c и b_c — проекции катетов a и b на гипотенузу; h — высота из вершины прямого угла. Предполагается, что отрезки измерены одной и той же единицей.

² В задаче 2 и во многих других случаях выгодно при вычислении разность квадратов заменять произведением суммы на разность.

11) $a_c = 1\frac{1}{2}$, $b_c = 2\frac{2}{3}$; 12) $a_c = 2$, $b_c = 18$;

13) $a = 136$, $h = 120$; 14) $b = 9$, $h = 8\frac{32}{41}$.

4. По данной сумме двух отрезков и среднему пропорциональному этих отрезков построить отрезки.

5. По данной разности двух отрезков и среднему пропорциональному этих отрезков построить отрезки.

6. Доказать, что в прямоугольном треугольнике $ab=ch$.

7. Катеты относятся, как 5:6, а гипотенуза равна 122 см. Найти отрезки гипотенузы, отсекаемые высотой.

8. Катеты относятся, как 3:2, а высота делит гипотенузу на отрезки, из которых один на 2 м больше другого. Определить гипотенузу.

9. Катеты относятся, как 3:7, а высота, проведенная на гипотенузу, равна 42 см. Определить отрезки гипотенузы.

10. Доказать, что диаметр окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, есть средняя пропорциональная между сторонами трапеции.

11. Доказать, что отношение квадратов катетов равно отношению их проекций на гипотенузу.

12. 1) Построить два отрезка, квадраты которых относятся как $m:n$.

2) Построить два отрезка, которые относились бы, как квадраты двух данных отрезков.

Теорема Пифагора

13. Узнать, какими тремя последовательными целыми числами могут выражаться стороны прямоугольного треугольника.

14. Между двумя фабричными зданиями устроен покатый желоб для передачи материалов. Расстояние между зданиями равно 10 м, а концы желоба расположены на высоте 8 м и 4 м над землей. Определить длину желоба.

15. 1) Точка внутри прямого угла удалена от его сторон на расстояния a и b . Найти ее расстояние от вершины.

2) Стороны прямоугольника равны 60 см и 91 см. Чему равна его диагональ?

16. Требуется выфрезеровать квадратную головку со стороной 32 мм. Чему должен быть равен наименьший диаметр круглого железа, годного для этой цели?

17. 1) Сторона квадрата равна a . Чему равна его диагональ?

2) Определить сторону квадрата, если она меньше диагонали на 2 см.

18. Диаметр бревна 12 см. Можно ли из этого бревна вытесать квадратный брус со стороной 10 см?

19. 1) Стороны прямоугольника равны a и b . Определить радиус описанного круга.

2) В круг вписан прямоугольник, стороны которого относятся, как 8:15. Определить эти стороны, если радиус круга равен 34 см.

20. 1) Катеты прямоугольного треугольника равны 8 дм и 18 см. Определить радиус описанного круга.

2) Катеты прямоугольного треугольника равны 16 см и 12 см. Определить медиану гипотенузы.

21. 1) В равнобедренном треугольнике боковая сторона 17 см, а основание 16 см. Определить высоту.

2) Определить стороны равнобедренного треугольника, если его высота равна 35 см, а основание относится к боковой стороне, как 48:25.

3) В равнобедренном треугольнике основание равно 4 см, а угол при нем равен 45° . Определить боковую сторону.

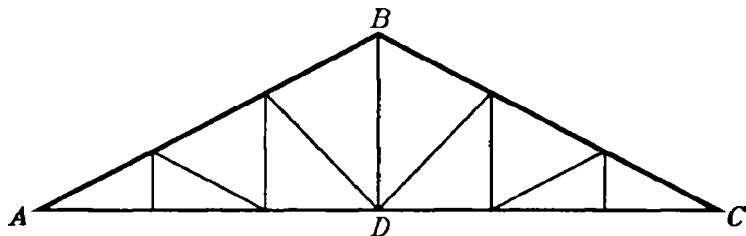


Рис. 28.

22. Стропильная ферма (рис. 28) имеет ноги AB и CB по 9 м и пролет AC в 15 м. Определить высоту фермы BD .

23. 1) Биссектриса прямого угла делит гипотенузу прямоугольного треугольника на части, равные $2\frac{1}{7}$ м и $2\frac{6}{7}$ м. Определить катеты.

2) Катеты прямоугольного треугольника равны 15 см и 20 см. Из вершины прямого угла проведены высота и биссектриса. На какие отрезки разделилась гипотенуза?

24. 1) В равностороннем треугольнике определить высоту по данной стороне a .

2) В равностороннем треугольнике определить сторону по данной высоте h .

3) В равностороннем треугольнике высота меньше стороны на m . Определить сторону.

4) В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30° , а больший катет равен 6 см. Определить две другие стороны этого треугольника.

25. 1) Боковые стороны треугольника равны: $a = 25$ см и $b = 30$ см, а высота $h_c = 24$ см. Определить основание c .

2) В треугольнике больший угол при основании равен 45° , а высота делит основание на части в 20 см и 21 см. Определить большую боковую сторону.

3) Из одной точки проведены к данной прямой перпендикуляр и две наклонные. Определить длину перпендикуляра, если наклонные равны 41 см и 50 см, а их проекции на данную прямую относятся, как 3:10.

26. 1) Диагонали ромба равны 24 см и 70 см. Определить сторону.

2) Определить диагонали ромба, если они относятся, как 3:4, а периметр равен 1 м.

27. 1) В равнобедренной трапеции основания равны 10 см и 24 см, боковая сторона 25 см. Определить высоту трапеции.

2) В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 41 см, высота равна 4 дм и средняя линия 45 см. Определить основание.

28. Параллельно прямой дороге, на расстоянии 500 м от нее, расположена цепь стрелков; расстояние между крайними стрелками равно 120 м, дальность полета пули равна 2,8 км. Какой участок дороги находится под обстрелом этой цепи?

29. На рисунке 29 изображена заклепка ОСТ 302 (ОСТ — общесоюзный стандарт) с потайной головкой. Угол $\alpha = 60^\circ$. Вычислить:

1) D , если $d = 16,5$ мм и $h = 7,5$ мм;

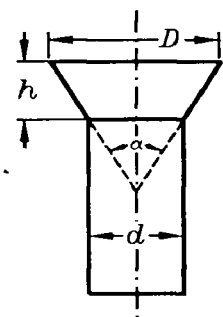


Рис. 29.

2) d , если $D=30$ мм и $h=9,5$ мм;

3) h , если $D=35$ мм и $d=22$ мм.

Написать формулу, связывающую между собой D , d , h .

30. 1) В треугольнике ABC проведена высота AD . Доказать, что $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.

2) Если M — некоторая точка высоты AD треугольника ABC , то $AB^2 - AC^2 = BM^2 - CM^2$. Доказать.

31. 1) Доказать, что в прямоугольной трапеции разность квадратов диагоналей равна разности квадратов оснований.

2) В прямоугольной трапеции меньшая диагональ равна наклонной боковой стороне. Определить большую диагональ, если наклонная боковая сторона равна a , а меньшее основание равно b .

32. Из листа железа требуется выштамповать круглые шайбы диаметром в 28 мм. Найти расстояние между прямыми, на которых следует расположить центры шайб (рис. 30).

33. 1) Радиус круга равен 89 дм, хорда 16 м. Определить ее расстояние от центра.

2) O — центр; ACB — хорда; OCD — радиус, перпендикулярный к ней, $OC=9$ см и $CD=32$ см. Определить хорду.

3) Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 13 см и 15 см, а общая хорда равна 24 см. Определить расстояние между центрами.

4) AB и CD — две параллельные хорды, расположенные по разные стороны от центра O окружности радиуса $R=15$ см. Хорда $AB=18$ см, хорда $CD=24$ см. Определить расстояние между хордами.

5) Две параллельные хорды AB и CD расположены по одну сторону от центра O окружности радиуса $R=30$ см. Хорда $AB=48$ см, хорда $CD=36$ см. Определить расстояние между хордами.

34. Чтобы измерить диаметр большого шкива, установили штангенциркуль так, как показано на рисунке 31. Длина ножек штангенциркуля $s=25$ мм, расстояние между концами ножек $l=200$ мм:

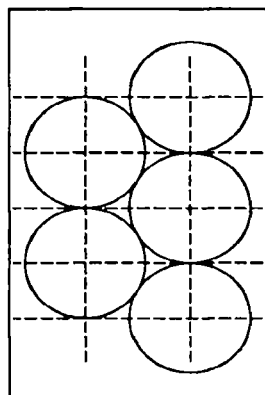


Рис. 30.

- 1) определить длину диаметра D ;
- 2) вывести формулу, выражающую зависимость D от s и l .

35. В сегменте хорда равна a , а высота h . Определить радиус круга.

36. Радиус круга равен 25 см; две параллельные хорды равны 14 см и 40 см. Определить расстояние между ними.

37. Расстояния от одного конца диаметра до концов параллельной ему хорды равны 13 см и 84 см. Определить радиус круга.

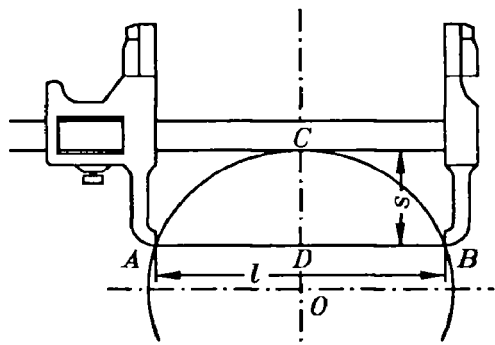


Рис. 31.

38. 1) К окружности радиуса, равного 36 см, проведена касательная из точки, удаленной от центра на 85 см. Определить длину касательной.

2) Из общей точки проведены к окружности две касательные. Радиус окружности равен 11 см, а сумма касательных равна 120 см.

Определить расстояние от центра до исходной точки касательных.

3) К окружности радиуса, равного 7 см, проведены две касательные из одной точки, удаленной от центра на 25 см. Определить расстояние между точками касания.

39. Два круга радиусов R и r внешне касаются. Из центра одного круга проведена касательная к другому кругу, а из полученной точки касания проведена касательная к первому кругу. Определить длину последней касательной.

40. 1) Два круга касаются извне. Определить длину их общей внешней касательной (между точками касания), если радиусы равны 16 см и 25 см.

2) Радиусы двух кругов равны 27 см и 13 см, а расстояние между центрами равно 50 см. Определить длину их общих касательных.

41. Касательная и секущая, проведенные из общей точки к одной окружности, взаимно перпендикулярны. Касательная равна 12 м, а внутренняя часть секущей равна 10 м. Определить радиус окружности.

42. AB и CD — параллельные прямые. AC — секущая, E и F — точки пересечения прямых AB и CD с биссектрисами углов C и A . Дано: $AF=96$ см и $CE=110$ см. Требуется определить AC .

43. В тупоугольном равнобедренном треугольнике ABC основание $AC=32$ м, а боковая сторона 20 м. Из вершины B проведен перпендикуляр к боковой стороне до пересечения с основанием. На какие части он делит основание?

44. Катет $AC=15$ см, катет $CB=8$ см. Из центра C радиусом CB описана дуга, отсекающая от гипотенузы часть BD , которую и требуется определить.

45. Дуга, описанная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника радиусом, равным меньшему катету, делит гипотенузу на отрезки в 98 см и 527 см (начиная от меньшего катета). Определить катеты.

46. AB — диаметр круга; BC — касательная; D — точка пересечения прямой AC с окружностью. Дано: $AD=32$ см и $DC=18$ см. Требуется определить радиус.

47. AB — диаметр; BC и CDA — касательная и секущая. Определить отношение $CD:DA$, если BC равна радиусу.

Биссектриса в прямоугольном треугольнике

48. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении 7:9. В каком отношении (считая части в том же порядке) делит ее высота?

49. Определить катеты, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на части в 15 см и 20 см.

50. В равнобедренном прямоугольном треугольнике катет равен a . На какие части делит его биссектриса противолежащего угла?

51. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит катет на отрезки m и n ($m>n$). Определить другой катет и гипотенузу.

52. В прямоугольном треугольнике, катеты которого равны 15 дм и 2 м, проведены: высота из вершины прямого угла и биссектрисы обоих углов, образуемых высотой с катетами. Определить отрезок гипотенузы, заключенный между биссектрисами.

53. В прямоугольном треугольнике ABC катет $BC=6$ см и гипотенуза $AB=10$ см. Проведены биссектрисы угла ABC и

его смежного, пересекающие катет AC и его продолжение в точках D и E . Определить длину DE .

54. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона $AB=10$ м и основание $AC=12$ м. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке D . Требуется определить BD .

55. 1) В равнобедренном треугольнике основание равно 30 см, а боковая сторона равна 39 см. Определить радиус вписанного круга.

2) В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 17:15. Основание равно 60 см. Найти радиус этого круга.

Высота и стороны в прямоугольном треугольнике, ромбе и трапеции

56. Из точки B проведены к данной прямой перпендикуляр BC и наклонная BA . На AC взята точка D , и прямая BD продолжена до пересечения в точке E с прямой AE , перпендикулярной к AC . Определить AE , если $BA=53$ дм, $AD=8$ дм и $DC=20$ дм.

57. 1) В равнобедренном треугольнике основание равно 30 дм, а высота 20 дм. Определить высоту, опущенную на боковую сторону.

2) В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 3 дм, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 4 дм. Определить стороны этого треугольника.

3) Диагонали ромба равны 14 дм и 48 дм. Определить его высоту.

58. 1) Гипотенуза $AB=34$ см; катет $BC=16$ см. Определить длину перпендикуляра, восстановленного к гипотенузе из середины до пересечения с катетом AC .

2) Радиус круга равен r . Определить длину хорды, проведенной из конца данного диаметра через середину перпендикулярного к нему радиуса.

59. В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC=16$ дм и катет $BC=12$ дм. Из центра B радиусом BC описана окружность и к ней проведена касательная, параллельная гипотенузе (причем касательная и треугольник лежат по разные стороны гипотенузы). Катет BC продолжен до пересечения с проведенной касательной. Определить, на сколько продолжен катет.

60. Из одной точки проведены к кругу две касательные. Длина касательной равна 156 дм, а расстояние между точками касания равно 120 дм. Определить радиус круга.

61. В прямоугольной трапеции основания равны 17 дм и 25 дм, а большая боковая сторона равна 10 дм. Из середины этой боковой стороны проведен перпендикуляр к ней до встречи с продолжением другой боковой стороны. Определить длину этого перпендикуляра.

Смешанные задачи на прямоугольный треугольник

62. AC и CB — катеты; CD — высота; $DE \parallel BC$. Определить отношение $AE:EC$, если $AC:CB=4:5$.

63. AC и CB — катеты; CD — высота; $DE \perp AC$ и $DF \perp CB$. Определить DE и DF , если $AC=75$ дм и $BC=100$ дм.

64. В двух равнобедренных треугольниках боковые стороны имеют одинаковую длину, а сумма углов при вершинах равна 180° . Основания относятся, как 9:40, а длина боковой стороны равна 41 дм. Определить основания.

65. 1) В треугольнике основание равно 60 м, высота 12 м и медиана основания 13 м. Определить боковые стороны.

2) В прямоугольном треугольнике найти отношение катетов, если высота и медиана, выходящие из вершины прямого угла, относятся, как 40:41.

66. Определить радиус круга, описанного около равнобедренного треугольника, если основание и боковая сторона треугольника соответственно равны: 1) 6 дм и 5 дм; 2) 24 м и 13 м.

67. В прямоугольном треугольнике катеты равны 13 дм и 84 дм. Определить радиус вписанного круга.

68. Расстояние между центрами двух окружностей, лежащих одна вне другой, равно 65 дм; длина их общей внешней касательной (между точками касания) равна 63 дм; длина их общей внутренней касательной равна 25 дм. Определить радиусы окружностей.

69. Длины двух параллельных хорд равны 40 дм и 48 дм, расстояние между ними равно 22 дм. Определить радиус круга.

70. В равнобедренной трапеции, описанной около круга, основания равны 36 см и 1 м. Определить радиус круга.

71. Около круга, радиус которого равен 12 см, описана равнобедренная трапеция с боковой стороной в 25 см. Определить основания этой трапеции.

72. Около круга радиуса r описана равнобедренная трапеция, у которой параллельные стороны относятся, как $m:n$. Определить стороны этой трапеции.

73. AB и AC — касательные к одному кругу с центром O , M — точка пересечения прямой AO с окружностью; DME — отрезок касательной, проведенной через M между AB и AC . Определить длину DE , если радиус круга равен 15 дм, а расстояние $AO=39$ дм.

74. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 дм и 20 дм. Определить расстояние от центра вписанного круга до высоты, проведенной на гипотенузу.

75. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведен перпендикуляр на гипотенузу, и на нем, как на диаметре, описана окружность, которая на катетах CA и CB дает внутренние отрезки m и n . Определить катеты ($m=12$; $n=18$).

76. В прямоугольном треугольнике катеты равны 75 дм и 100 дм. На отрезках гипотенузы, образуемых высотой, построены полукруги по одну сторону с данным треугольником. Определить отрезки катетов, заключенные внутри этих полукругов.

77. Если два круга имеют внешнее касание, то их общая внешняя касательная есть средняя пропорциональная между их диаметрами. Доказать.

78. В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD перпендикулярна к основаниям AD и BC ; сумма острых углов A и C равна 90° . Основание $AD=a$ и $BC=b$. Определить боковые стороны AB и CD .

Косоугольный треугольник

79. На рисунке 32 показан план помещения, которое желают разгородить по линии AC . Ввиду препятствий, встречающихся вдоль прямой AC , вместо нее измерены: $AB=50$ м, $BC=35$ м и $\angle ABC=60^\circ$. Вычислить по этим данным длину AC .

80. На рисунке 33 изображен кран, у которого стойка $a=10$ м и плечо $b=13$ м. Угол между a и b равен 120° . Определить длину тяги c .

81. В треугольнике определить вторую боковую сторону, если следующими числами соответственно выражаются первая боковая сторона, основание и проекция второй боковой стороны на основание: 1) 6; 5; 3,8; 2) 2; 3; 2; 3) 12; 8; 11; 4) 2; 2; 3.

82. Определить вид треугольника (относительно углов) если даны три стороны или отношения их: 1) 2; 3; 4; 2) 3; 4; 5; 3) 4; 5; 6; 4) 10; 15; 18; 5) 68; 119; 170.

83. В треугольнике ABC пусть будут: b — основание, a и c — боковые стороны; p и q — их проекции на основание, h — высота. Определить p , q и h , если даны три стороны:

1) $a=13$, $b=14$, $c=15$; 2) $a=37$, $b=30$, $c=13$;

3) $a=25$, $b=12$, $c=17$; 4) $a=2$, $b=4$, $c=3$.

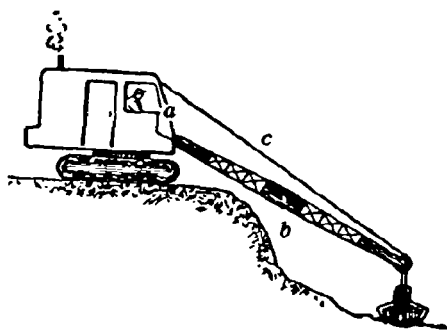


Рис. 33.

84. В треугольнике определить третью сторону, если две другие образуют угол в 60° и соответственно равны: 1) 5 см и 8 см; 2) 8 см и 15 см; 3) 63 см и 80 см.

85. В треугольнике определить третью сторону, если две другие образуют угол в 120° и соответственно равны: 1) 3 см и 5 см; 2) 7 см и 8 см; 3) 11 см и 24 см.

86. В треугольнике определить третью сторону, если две другие образуют угол в 45° и соответственно равны: 1) 2 и 3; 2) $\sqrt{8}$ и 5; 3) $\sqrt{18}$ и 7.

87. Определить стороны треугольника, зная, что средняя по величине сторона отличается от каждой из двух других на единицу и что проекция большей стороны на среднюю равна 9 единицам.

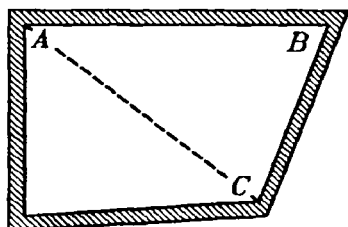


Рис. 32.

88. Сторона треугольника равна 21 см, а две другие стороны образуют угол в 60° и относятся, как 3:8. Определить эти стороны.

89. В треугольнике боковая сторона равна 16 м и образует с основанием угол в 60° ; другая боковая сторона равна 14 м. Определить основание.

90. Основание треугольника равно 13 см; угол при вершине равен 60° ; сумма боковых сторон равна 22 см. Определить боковые стороны и высоту.

91. В треугольнике основание равно 12 см; один из углов при нем равен 120° ; сторона против этого угла равна 28 см. Определить третью сторону.

92. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB продолжена на длину BD , равную BC , и точка D соединена с C . Определить стороны треугольника ADC , если катет $BC=a$.

93. Определить хорду половинной дуги, если хорда целой дуги равна a , радиус равен r ($r=25$, $a=48$).

94. 1) В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC=15$ см и катет $BC=20$ см. На гипотенузе AB отложена часть AD длиной в 4 см, и точка D соединена с C . Определить длину CD .

2) Треугольник ABC — прямоугольный при C . На продолжении гипотенузы AB отложен отрезок BD , равный катету BC , и точка D соединена с C . Определить длину CD , если $BC=7$ см и $AC=24$ см.

95. В треугольнике ABC проведены высоты BD и CE , и точки D и E соединены. Найти отношение площади $\triangle ADE$ к площади $\triangle ABC$: 1) если $\angle A=45^\circ$; 2) если $\angle A=30^\circ$.

96. В треугольнике ABC дана точка D на стороне AB ; определить длину CD , если известно, что $a=37$, $b=15$, $c=44$ и $AD=14$.

97. В тупоугольном треугольнике большая сторона равняется 16 см, а высоты, проведенные из обоих ее концов, отстоят от вершины тупого угла на 2 см и на 3 см. Определить две меньшие стороны треугольника.

98. Стороны равнобедренного треугольника суть: $AB=BC=50$ см и $AC=60$ см. Проведены высоты AE и CD , и точки D и E соединены. Определить стороны треугольника DBE .

99. В треугольнике ABC из конца C стороны AC проведен перпендикуляр к ней до пересечения в точке D с продолжением стороны AB . Определить BD и CD , если $AB=45$, $BC=39$ и $AC=42$.

100. В треугольнике ABC даны стороны: $AB=15$, $AC=14$ и $BC=13$. Биссектриса угла B продолжена за его вершину до пересечения в точке E с перпендикуляром к AC , проведенным из точки C . Определить длину CE .

101. Данного круга касаются два равных меньших круга — один изнутри, другой извне, причем дуга между точками касания содержит 60° . Радиусы меньших кругов равны r , радиус большего круга равен R . Определить расстояние между центрами меньших кругов.

Параллелограмм и трапеция

102. 1) Стороны параллелограмма равны 23 см и 11 см, а диагонали относятся, как 2:3. Определить диагонали.

2) Диагонали параллелограмма равны 17 см и 19 см, а стороны относятся, как 2:3. Определить стороны.

103. 1) Диагонали параллелограмма равны 12 см и 14 см, а разность сторон равна 4 см. Определить стороны параллелограмма.

2) Определить стороны и диагонали параллелограмма, если большая сторона равна меньшей диагонали, разность сторон равна 3 см и разность диагоналей равна 2 см.

104. 1) Стороны треугольника: 16, 18 и 26. Вычислить медиану большей стороны.

2) Две стороны треугольника 7 и 11; медиана к третьей стороне равна 6. Определить третью сторону.

3) Стороны треугольника a , b и c . Определить медианы.

105. Определить высоту параллелограмма, у которого основание равно 51 см, а диагонали 40 см и 74 см.

106. В равнобедренной трапеции определить длину диагоналей: 1) если основания равны 4 м и 6 м, а боковая сторона равна 5 м; 2) если одна из сторон равна 5 см, а другие три равны каждая 4 см.

107. Определить высоту и диагонали трапеции, если основания a и c и боковые стороны b и d выражаются следующими числами:

1) $a=25$, $b=13$, $c=11$, $d=15$;

2) $a=28, b=25, c=16, d=17$;

3) $a=6, b=3, c=1, d=4$.

108. В треугольник вписан параллелограмм так, что одна его сторона лежит на основании треугольника, а диагонали соответственно параллельны боковым сторонам треугольника. Основание треугольника равно 45 см, а боковые стороны 39 см и 48 см. Определить стороны параллелограмма.

109. Доказать, что в равнобедренной трапеции квадрат диагонали равен квадрату боковой стороны, сложенному с произведением оснований.

110. Доказать, что во всякой трапеции сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований.

111. Доказать, что во всяком четырехугольнике сумма квадратов диагоналей вдвое больше суммы квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

112. Определить острый угол ромба, в котором сторона есть средняя пропорциональная между диагоналями.

§ 11. Пропорциональные отрезки в круге

1. Ферма моста ограничена дугой окружности (рис. 34); высота фермы $MK=h=3$ м; радиус дуги AMB пролета $R=8,5$ м. Вычислить длину AB пролета моста.

2. В сводчатом подвале, имеющем форму полуцилиндра, надо поставить две стойки, каждая на одинаковом расстоянии от ближайшей стены. Определить высоту стоек, если ширина подвала по низу равна 4 м, а расстояние между стойками 2 м.

3. 1) Из точки окружности проведен перпендикуляр на диаметр. Определить его длину при следующей длине отрезков диаметра: 1) 12 см и 3 см; 2) 16 см и 9 см; 1) 2 м и 5 дм.

2) Из точки диаметра проведен перпендикуляр до пересечения с окружностью. Определить длину этого перпендикуляра, если диаметр равен 40 см, а проведенный перпендикуляр отстоит от одного из концов диаметра на 8 см.

4. Диаметр разделен на отрезки: $AC=8$ дм и $CB=5$ м, и из точки C проведен к нему перпендикуляр CD данной длины. Указать положение точки D относительно круга, когда CD равняется: 1) 15 дм; 2) 2 м; 1) 23 дм.

5. ACB — полуокружность; CD — перпендикуляр на диаметр AB . Требуется:

- 1) определить DB , если $AD=25$ и $CD=10$;
- 2) определить AB , если $AD:DB=4:9$ и $CD=30$;
- 3) определить AD , если $CD=3AD$, а радиус равен r ;
- 4) определить AD , если $AB=50$ и $CD=15$.

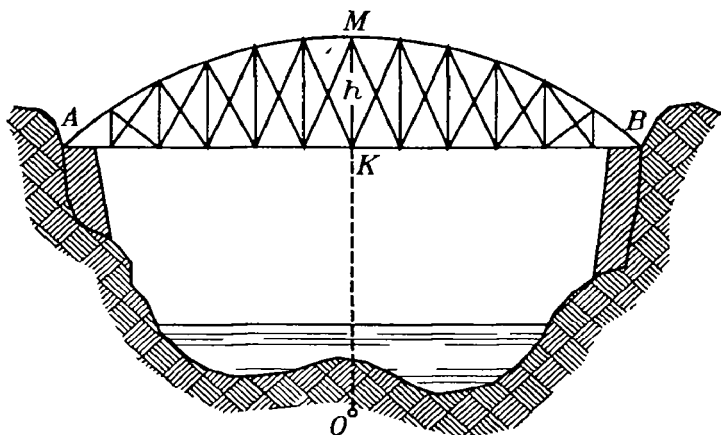


Рис. 34.

6. 1) Перпендикуляр из точки окружности на радиус, равный 34 см, делит его в отношении 8:9 (начиная от центра). Определить длину перпендикуляра.

2) Хорда BDC перпендикулярна к радиусу ODA . Определить BC , если $OA=25$ см и $AD=10$ см.

3) Ширина кольца, образованного двумя concentric окружностями, равна 8 дм; хорда большей окружности, касательная к меньшей, равна 4 м. Определить радиусы окружностей.

7. С помощью сравнения отрезков доказать, что среднее арифметическое двух чисел (неравных) больше их среднего геометрического.

8. Построить отрезок, средний пропорциональный между отрезками 3 см и 5 см.

9. Построить отрезок, равный: $\sqrt{15}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{3}$.

10. ADB — диаметр; AC — хорда; CD — перпендикуляр к диаметру. Определить хорду AC : 1) если $AB=2$ м и $AD=0,5$ м; 2) если $AD=4$ см и $DB=5$ см; 3) если $AB=20$ м и $DB=15$ м.

11. AB — диаметр; AC — хорда, AD — ее проекция на диаметр AB . Требуется:

- 1) определить AD , если $AB=18$ см и $AC=12$ см;
- 2) определить радиус, если $AC=12$ м и $AD=4$ м;
- 3) определить DB , если $AC=24$ см и $DB=7/9 AD$.

12. AB — диаметр; AC — хорда, AD — ее проекция на диаметр AB . Требуется:

- 1) определить AC , если $AB=35$ см и $AC=5AD$;
- 2) определить AC , если радиус равен r и $AC=DB$.

13. Две хорды пересекаются внутри круга. Отрезки одной хорды равны 24 см и 14 см; один из отрезков другой хорды равен 28 см. Определить второй ее отрезок.

14. Мостовая ферма ограничена дугой окружности (рис. 34); длина моста $AB=6$ м, высота $h=1,2$ м. Определить радиус дуги ($OM=R$).

15. Два отрезка AB и CD пересекаются в точке M так, что $MA=7$ см, $MB=21$ см, $MC=3$ см и $MD=16$ см. Лежат ли точки A, B, C и D на одной окружности?

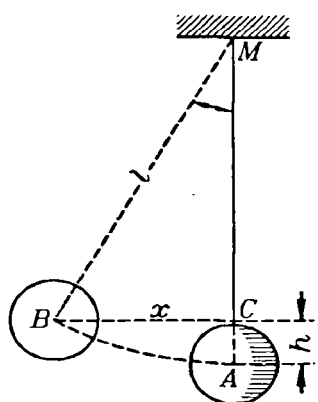


Рис. 35.

16. Длина маятника $MA=l=1$ м (рис. 35), высота подъема его, при отклонении на угол α , $CA=h=10$ см. Найти расстояние BC точки B от MA ($BC=x$).

17. Для перевода железнодорожного пути шириной $b=1,524$ м в месте AB (рис. 36) сделано закругление; при этом оказалось, что $BC=a=42,4$ м. Определить радиус закругления $OA=R$.

18. Хорда AMB повернута около точки M так, что отрезок MA увеличился в $2\frac{1}{2}$ раза. Как изменился отрезок MB ?

19. 1) Из двух пересекающихся хорд одна разделилась на части в 48 см и 3 см, а другая — пополам. Определить длину второй хорды.

2) Из двух пересекающихся хорд одна разделилась на части в 12 м и 18 м, а другая — в отношении 3:8. Определить длину второй хорды.

20. Из двух пересекающихся хорд первая равна 32 см, а отрезки другой хорды равны 12 см и 16 см. Определить отрезки первой хорды.

21. Секущая ABC повернута около внешней точки A так, что внешний ее отрезок AB уменьшился в три раза. Как изменилась длина секущей?

22. Пусть будет ADB и AEC две прямые, пересекающие окружность: первая — в точках D и B , вторая — в точках E и C . Требуется:

1) определить AE , если $AD=5$ см, $DB=15$ см и $AC=25$ см;

2) определить BD , если $AB=24$ м, $AC=16$ м и $EC=10$ м;

3) определить AB и AC , если $AB+AC=50$ м, а $AD:AE=3:7$.

23. Радиус окружности равен 7 см. Из точки, удаленной от центра на 9 см, проведена секущая так, что она делится окружностью пополам. Определить длину этой секущей.

24. MAV и MCD — две секущие к одной окружности. Требуется:

1) определить CD , если $MB=1$ м, $MD=15$ дм и $CD=MA$;

2) определить MD , если $MA=18$ см, $AB=12$ см и $MC:CD=5:7$;

3) определить AB , если $AB=MC$, $MA=20$ и $CD=11$.

25. Две хорды продолжены до взаимного пересечения. Определить длину полученных продолжений, если хорды равны a и b , а их продолжения относятся, как $m:n$.

26. Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Определить длину касательной, если внешний и внутренний отрезки секущей соответственно выражаются следующими числами: 1) 4 и 5; 2) 2,25 и 1,75; 3) 1 и 2.

27. Касательная равна 20 см, а наибольшая секущая, проведенная из той же точки, равна 50 см. Определить радиус круга.

28. Секущая больше своего внешнего отрезка в $2\frac{1}{4}$ раза. Во сколько раз она больше касательной, проведенной из той же точки?

29. Общая хорда двух пересекающихся окружностей продолжена, и из точки, взятой на продолжении, проведены к ним касательные. Доказать, что они равны.

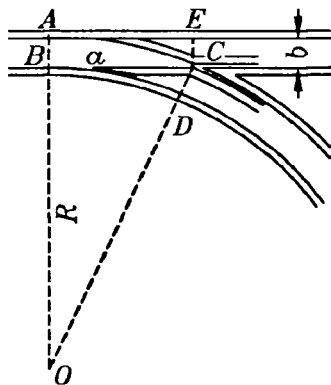


Рис. 36.

30. На одной стороне угла A отложены один за другим отрезки: $AB=6$ см и $BC=8$ см, а на другой стороне отложен отрезок $AD=10$ см. Через точки B , C и D проведена окружность. Узнать, касается ли этой окружности прямая AD , а если нет, то будет ли точка D первой (считая от A) или второй точкой пересечения.

31. Пусть будет: AB — касательная и ACD — секущая той же окружности. Требуется:

- 1) определить CD , если $AB=2$ см и $AD=4$ см;
- 2) определить AD , если $AC:CD=4:5$ и $AB=12$ см;
- 3) определить AB , если $AB=CD$ и $AC=a$.

32. 1) Как далеко видно с воздушного шара (рис. 37), поднявшегося на высоту 4 км над Землей (радиус Земли равен ≈ 6370 км)?

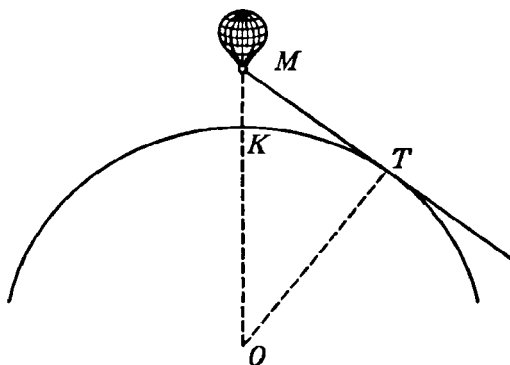


Рис. 37.

2) Гора Эльбрус (на Кавказе) поднимается над уровнем моря на 5600 м. Как далеко можно видеть с вершины этой горы?

3) M — наблюдательный пункт высотой h метров над Землей (рис. 38); радиус Земли R , $MT=d$ есть наибольшее видимое расстояние. Доказать, что

$$d = \sqrt{2Rh + h^2}.$$

Замечание. Так как h^2 вследствие своей малости сравнительно с $2Rh$ на результат почти не влияет, то можно пользоваться приближенной формулой $d \approx \sqrt{2Rh}$.

33. 1) Касательная и секущая, выходящие из одной точки, соответственно равны 20 см и 40 см; секущая удалена от центра на 8 см. Определить радиус круга.

2) Определить расстояние от центра до той точки, из которой выходят касательная и секущая, если они соответственно равны 4 см и 8 см, а секущая удалена от центра на 12 см.

34. 1) Из общей точки проведены к окружности касательная и секущая. Определить длину касательной, если она на 5 см больше внешнего отрезка секущей и на столько же меньше внутреннего отрезка.

2) Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Секущая равна a , а ее внутренний отрезок больше внешнего отрезка на длину касательной. Определить касательную.

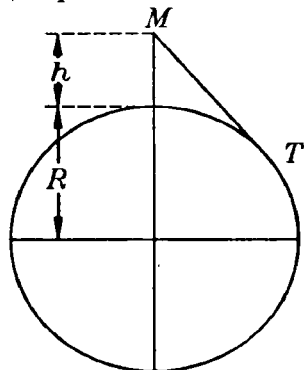


Рис. 38.

35. Из общей точки проведены к одной окружности касательная и секущая. Касательная больше внутреннего и внешнего отрезков секущей соответственно на 2 см и 4 см. Определить длину секущей.

36. Из одной точки проведены к окружности касательная и секущая. Определить их длину, если касательная на 20 см меньше внутреннего отрезка секущей и на 8 см больше внешнего отрезка.

37. 1) Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Сумма их равна 30 см, а внутренний отрезок секущей на 2 см меньше касательной. Определить секущую и касательную.

2) Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Сумма их равна 15 см, а внешний отрезок секущей на 2 см меньше касательной. Определить секущую и касательную.

38. Отрезок AB продолжен на расстояние BC . На AB и AC , как на диаметрах, построены окружности. К отрезку AC в точке B проведен перпендикуляр BD до пересечения с большей окружностью. Из точки C проведена касательная CK к меньшей окружности. Доказать, что $CD=CK$.

39. К данной окружности проведены две параллельные касательные и третья касательная, пересекающая их. Радиус есть средняя пропорциональная между отрезками третьей касательной. Доказать.

40. Даны две параллельные прямые на расстоянии 15 дм одна от другой; между ними дана точка M на расстоянии 3 дм от одной из них. Через точку M проведена окружность, касательная к обоим параллелям. Определить расстояние между проекциями центра и точки M на одну из данных параллелей.

41. В круг радиуса r вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма высоты и основания равна диаметру круга. Определить высоту.

42. Определить радиус круга, описанного около равнобедренного треугольника: 1) если основание равно 16 см, а высота 4 см; 2) если боковая сторона равна 12 дм, а высота 9 дм; 3) если боковая сторона равна 15 м, а основание 18 м.

43. В равнобедренном треугольнике основание равно 48 дм, а боковая сторона равна 30 дм. Определить радиусы кругов, описанного и вписанного, и расстояние между их центрами.

44. Радиус равен r , хорда данной дуги равна a . Определить хорду удвоенной дуги.

45. Радиус окружности равен 8 дм; хорда AB равна 12 дм. Через точку A проведена касательная, а из точки B — хорда BC , параллельная касательной. Определить расстояние между касательной и хордой BC .

46. Точка A удалена от прямой MN на расстояние a . Данным радиусом r описана окружность так, что она проходит через точку A и касается линии MN . Определить расстояние между полученной точкой касания и данной точкой A .

§ 12. Правильные многоугольники ¹

1. 1) Вычислить центральный угол правильных 24-угольника и 16-угольника.

2) Какой правильный многоугольник имеет центральный угол, равный 30° ? 12° ?

2. Центральный угол правильного многоугольника и угол при вершине в сумме составляют 180° . Доказать.

¹ Обозначения: n — число сторон правильного многоугольника; a_n — сторона правильного вписанного многоугольника; b_n — сторона правильного описанного многоугольника; h_n — апофема правильного вписанного многоугольника; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности.

3. Определить величину угла правильного n -угольника ($n=3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 25$).

4. 1) Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен 135° ? 150° ?

2) Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внешних углов которого равен 36° ? 24° ?

5. Конец валика диаметром в 4 см опилен под квадрат. Определить наибольший размер, который может иметь сторона квадрата.

6. Конец винта газовой задвижки имеет правильную трехгранную форму. Какой наибольший размер может иметь каждая грань, если цилиндрическая часть винта имеет диаметр в 2 см?

7. Вычислить, какой размер отверстия w должен иметь ключ для правильной шестигранной гайки, если ширина грани гайки $a=2,5$ см. Величина зазора между гранями гайки и ключа равна 0,5 мм (рис. 39).

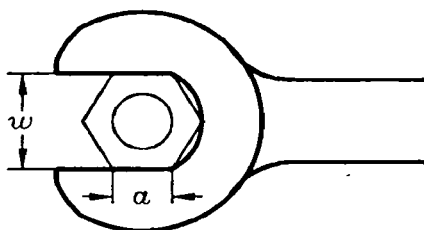


Рис. 39.

8. 1) Вписать в окружность правильный 12-угольник, 15-угольник.

2) Описать около круга правильный 8-угольник, 10-угольник.

3) По данной стороне a' построить правильный 8-угольник, 12-угольник.

9. 1) Хорда, перпендикулярная к радиусу в его середине, равна стороне правильного вписанного треугольника. Доказать.

2) Показать, что $k_6=0,5a_3$.

10. 1) В правильном треугольнике апофема равна $1/3$ высоты и $1/2$ радиуса описанного круга. Доказать.

2) Разность между радиусами окружностей, описанной около правильного треугольника и вписанной в него, равна m . Определить сторону треугольника.

11. 1) Сторона правильного многоугольника равна a ; радиус круга, описанного около этого многоугольника, равен R . Определить радиус вписанного круга.

2) Сторона правильного многоугольника равна a ; радиус вписанного в него круга равен r . Определить радиус описанного круга.

3) R — радиус описанного около многоугольника круга, r — радиус вписанного круга. Определить сторону этого многоугольника.

12. В окружность радиуса $R=4$ см вписан правильный 6-угольник. Найти проекции его сторон на каждую диагональ.

13. Доказать, что:

$$1) a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}; \quad 2) k_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

14. Доказать, что:

$$1) a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}; \quad 2) k_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

15. По данному $a_n = a$ определить R , если n равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 8; 5) 12.

16. По данному a определить: 1) k_3 ; 2) k_4 ; 3) k_6 .

17. По данному $k_n = k$ определить R , если n равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 8.

18. По данному R определить: 1) b_3 ; 2) b_4 ; 3) b_6 .

19. По данному радиусу круга R и данной стороне a_n правильного вписанного n -угольника определить сторону b_n правильного описанного n -угольника.

20. В круг радиуса $R=50$ см вписать правильный 7-угольник, воспользовавшись тем, что сторона правильного вписанного 7-угольника равна приблизительно половине стороны правильного треугольника.

21. Определить длину диагоналей правильного 8-угольника: 1) по данному радиусу R ; 2) по данной стороне a .

22. Определить длину диагоналей правильного 12-угольника: 1) по данному радиусу R ; 2) по данной стороне a .

23. Построить правильный пятиугольник по диагонали.

24. Самое простое мансардное покрытие образует в вертикальном сечении половину правильного 8-угольника (рис. 40). Найти ширину перекрытия BD , сторону 8-угольника и высоту мансардной комнатки $ABDE$. Дано: $AE=6$ м.

25. В окружность вписан и около нее описан правильные n -угольники. Найти отношение сторон этих n -угольников ($n=3$; $n=6$).

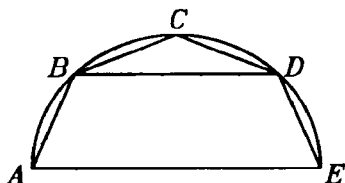


Рис. 40.

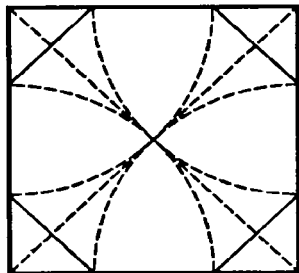


Рис. 41.

26. В окружность радиуса R вписан правильный n -угольник, и середины его сторон последовательно соединены. Определить сторону нового n -угольника, если n равно: 1) 6; 2) 8.

27. 1) В правильном 8-угольнике со стороной a соединены середины четырех сторон, взятых через одну так, что получился квадрат. Определить сторону квадрата.

2) В правильном 12-угольнике со стороной a соединены середины шести сторон, взятых через одну так, что получился правильный 6-угольник. Определить его сторону.

28. Построить правильный 8-угольник отсечением углов данного квадрата.

Чтобы превратить данный квадрат отсечением его углов в правильный 8-угольник, засекаем стороны (рис. 41) квадрата дугами, имеющими радиусами половину диагонали квадрата, а центрами — вершины квадрата. Доказать, что полученный 8-угольник будет правильным.

29. Путем срезывания углов превратить данный правильный треугольник со стороной a в правильный 6-угольник и определить его сторону.

30. В окружность радиуса R вписан правильный многоугольник со стороной a_n . Удвоить число сторон этого много-

угольника и доказать, что $a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$.

31. Сторона правильного вписанного в окружность треугольника равна b . Найти радиус круга и сторону вписанного в окружность квадрата.

32. В окружность, радиус которой равен 4 дм, вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Определить радиус окружности, описанной около квадрата.

33. 1) В окружность радиуса R вписан правильный треугольник, в который вписан круг, а в этот круг вписан квадрат. Определить сторону этого квадрата.

2) Около правильного треугольника со стороной a описана окружность; около этой окружности описан квадрат, а около него — окружность. Определить радиус окружности, описанной около квадрата.

34. 1) Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна a и служит для одной окружности стороной правильного треугольника, а для другой — стороной вписанного квадрата. Определить расстояние между центрами окружностей.

2) Центры двух пересекающихся окружностей лежат по одну сторону от их общей хорды, имеющей длину a и стягивающей в одной окружности дугу в 60° , а в другой — дугу в 30° . Определить расстояние между центрами.

35. ABC — вписанный правильный треугольник; AD — треть стороны AB ; BE — треть стороны BC . Доказать, что отрезок DE равен радиусу.

36. Каждая сторона правильного треугольника, равная a , разделена на три равные части, и соответственные точки деления (считая в одном направлении) соединены между собой, отчего получился новый треугольник. Определить радиус вписанного в него круга.

37. Вписать в данный квадрат другой с данной стороной. Всегда ли разрешима задача?

38. В ромб вписать квадрат, стороны которого параллельны диагоналям ромба.

39. Один из двух квадратов со стороной a , наложенных друг на друга, повернут около центра на 45° . Определить периметр образовавшейся при этом звезды.

40. 1) Диагонали правильного пятиугольника в свою очередь образуют правильный пятиугольник. Доказать.

2) Если стороны правильного пятиугольника продолжить до взаимного пересечения, то получается звездчатый пятиугольник с равными сторонами (пентаграмма). Доказать.

41. 1) Окружность радиуса R разделена на шесть равных частей, и точки деления соединены хордами через одну. Определить сторону полученной шестиугольной звезды.

2) Окружность радиуса R разделена на 8 равных частей, и точки деления соединены хордами через одну. Определить сторону восьмиугольной звезды.

42. По данному радиусу R определить хорду дуги, которая содержит: 1) 135° ; 2) 150° .

43. Определить отношение между сторонами треугольника, если его углы относятся, как 1:2:3.

44. Середина полуокружности соединена с концами диаметра, и через середины соединяющих отрезков проведена хорда. Каждый из боковых отрезков хорды равен c . Определить радиус круга.

45. В сегмент с дугой в 120° и высотой h вписан прямоугольник, у которого основание в 4 раза больше высоты. Определить высоту прямоугольника.

46. n равных кругов, касающихся между собой, касаются данного круга, радиус которого равен R . Определить радиус этих кругов, если их число n равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

47. На каждой из двух половин данного отрезка построены, как на диаметрах, два круга, и из каждого конца этого отрезка проведены касательные к кругу, построенному у другого конца. Доказать, что отрезок, соединяющий точки пересечения касательных, равен стороне квадрата, вписанного в один из построенных кругов.

§ 13. Площади прямолинейных фигур.

Квадрат

1. Вычислить площадь сечения дорожной трубы, изображенной на рисунке 42 (размеры даны в метрах).

2. Железная проволока с сечением в 1 мм^2 разрывается от груза в 40 кг. Какой нагрузкой разорвется железный стержень, поперечное сечение которого — квадрат со стороной в 24 мм?

3. Стороны двух участков земли квадратной формы равны 100 м и 150 м. Определить сторону квадратного участка земли, равновеликого обоим.

4. 1) Определить площадь квадрата по его диагонали l .

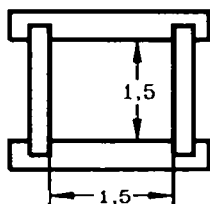


Рис. 42.

2) Определить площадь квадрата, вписанного в круг радиуса R .

3) Во сколько раз площадь описанного квадрата больше площади вписанного (в тот же круг)?

5. 1) Как изменится площадь квадрата, если каждую его сторону увеличить в 3 раза? уменьшить в 1,5 раза?

2) Как надо изменить каждую сторону квадрата, чтобы площадь его увеличилась в 4 раза? уменьшилась в 25 раз?

6. Площадь плана квадратного участка земли (масштаб 1:10 000) равна 552,25 см². Найти площадь участка в натуре.

Прямоугольник

7. Танк легкого типа весит 6880 кг, ширина его гусениц 0,35 м, длина части гусениц, соприкасающихся с грунтом, 2,05 м (с каждой стороны). Какой вес приходится на 1 дм² рабочей площади гусениц?

8. Заводское здание прямоугольной формы имеет длину 82,5 м и ширину 26,5 м. Определить в арах площадь застроенного участка земли.

9. Прямоугольный участок земли содержит 400 га, длина участка 8 км; найти длину границы участка (периметр).

10. 1) Определить стороны прямоугольника, если они относятся, как 4:9, а площадь равна 144 м².

2) Определить стороны прямоугольника, если его периметр равен 74 дм, а площадь равна 3 м².

11. Стороны прямоугольника равны 72 м и 8 м. Определить сторону равновеликого ему квадрата.

12. Вычислить площадь поперечного сечения равнобокого углового железа (рис. 43, размеры даны в миллиметрах).

13. Вычислить площадь поперечного сечения трубы на рисунке 44 (размеры даны в миллиметрах).

14. Диагональ прямоугольника равна 305 см, а площадь равна 37 128 см². Определить периметр этого прямоугольника.

Параллелограмм

15. Через поле, имеющее форму прямоугольника $ABCD$ (рис. 45), должна пройти железная дорога. Известно, что $AB=125$ м, $BC=72,5$ м, $AL=KC=114,6$ м. Вычислить площадь отчуждаемой полосы $BLDK$.

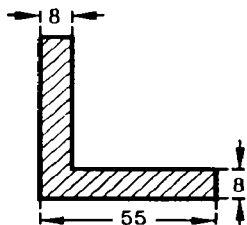


Рис. 43.

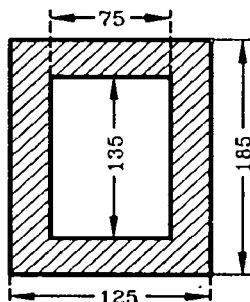


Рис. 44.

16. Площадь параллелограмма содержит 480 см^2 ; его периметр равен 112 см ; расстояние между большими сторонами равно 12 см . Определить расстояние между меньшими сторонами.

17. Определить площадь параллелограмма по двум высотам его h_1 и h_2 и периметру $2p$.

18. Определить площадь параллелограмма по двум сторонам и углу между ними: 1) $a, b, 30^\circ$; 2) $a, b, 45^\circ$; 3) $a, b, 60^\circ$.

19. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найти острый угол параллелограмма, если площадь его равна половине площади прямоугольника.

20. Начертить квадрат и ромб, периметры которых одинаковы. Площадь которой из этих фигур больше? почему?

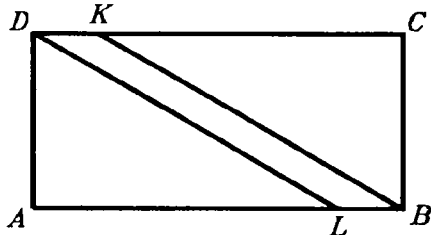


Рис. 45.

21. Определить площадь ромба, если его высота равна 12 см , а меньшая диагональ 13 см .

22. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB=37 \text{ см}$, а перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей на сторону AD , делит ее на отрезки: $AE=26 \text{ см}$ и $ED=14 \text{ см}$. Определить площадь параллелограмма.

23. 1) В параллелограмме $ABCD$ (рис. 46) проведена диагональ AC , и на ней взята произвольная точка M . Через M проведены прямые, параллельные сторонам параллелограмма: $EF \parallel BC$ и $GH \parallel CD$. Доказать, что образовавшиеся при этом параллелограммы $DHMF$ и $EBGM$, через которые диагональ не проходит, равновелики.

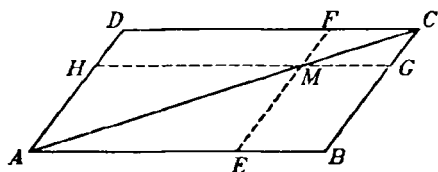


Рис. 46.

2) Параллелограмм имеет стороны $a=8$ см и $b=4$ см. Превратить его в равновеликий ему параллелограмм с таким же углом и с основанием $b=6$ см.

24. В данном квадрате каждая вершина соединена с серединой стороны, лежащей между двумя следующими вершинами (считая вершины в одинаковом порядке). Соединительные прямые образуют своим пересечением внутренний квадрат. Доказать (вычислением), что его площадь составляет $\frac{1}{5}$ площади данного квадрата.

25. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон находится на гипотенузе. Боковые отрезки гипотенузы равны m и n . Определить площадь этого квадрата.

26. Из каждой вершины данного квадрата проведена в следующую вершину внутренняя дуга в 120° , и точки пересечения дуг соединены между собой, отчего получился внутренний квадрат. Найти отношение площадей квадратов.

27. Из точки, взятой на гипотенузе, проведены перпендикуляры на оба катета. Определить площадь прямоугольника, образованного этими перпендикулярами, если отрезки катетов при гипотенузе равны m и n .

28. В треугольник, у которого основание равно 30 см, а высота 10 см, вписан прямоугольник с площадью в 63 см^2 . Определить стороны этого прямоугольника.

Треугольник

29. Воздух давит с силой 1,03 кг на каждый квадратный сантиметр. Найти давление воздуха на треугольную площадку, основание которой равно 0,13 м, высота 0,18 м.

30. Определить площадь треугольника, если его основание и высота соответственно равны: 1) 32 см и 18 см; 2) 5 дм и 4 м; 3) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{20}$.

31. 1) Построить треугольник, равновеликий треугольнику ABC , сохраняя сторону BC , но заменяя угол ABC данным углом α .

2) Построить равнобедренный треугольник с основанием BC , равновеликий данному треугольнику ABC .

32. 1) Разделить данный треугольник на три равновеликих треугольника прямыми, выходящими из одной вершины.

2) Данный параллелограмм разделить на четыре равновеликие части прямыми, выходящими из одной вершины.

3) Данный параллелограмм разделить на три равновеликие части прямыми, выходящими из одной вершины.

33. Определить площадь треугольника по сторонам a и b и углу между ними: 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 60° .

34. Если две стороны треугольника равны 3 см и 8 см, то может ли его площадь быть равна: 1) 10 см^2 ; 2) 15 см^2 ; 3) 12 см^2 ?

35. 1) Определить площадь прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза равна 313 см, а один из катетов 312 см.

2) Площадь прямоугольного треугольника равна 720 см^2 , а катеты относятся, как 9:40. Определить гипотенузу.

3) По данным катетам a и b определить высоту, проведенную на гипотенузу.

36. Определить площадь равнобедренного прямоугольного треугольника по его гипотенузе c .

37. Определить площадь равнобедренного треугольника, если его основание и боковая сторона соответственно равны: 1) 56 см и 1 м; 2) b и c ; 3) 20 см и 11 см.

38. Через точку K , данную на стороне AB треугольника ABC , провести прямую так, чтобы она разделила площадь треугольника пополам.

39. 1) Определить площадь равностороннего треугольника по его стороне a .

2) Определить сторону равностороннего треугольника по его площади Q .

3) Определить площадь равностороннего треугольника по его высоте h .

40. 1) Определить площадь правильного треугольника, вписанного в круг радиуса R .

2) Определить площадь правильного описанного треугольника, если радиус круга равен r .

41. Определить площадь прямоугольного треугольника, если его высота делит гипотенузу на отрезки в 32 см и 18 см.

42. Определить площадь треугольника, если его высота равна 36 см, а боковые стороны 85 см и 60 см.

43. Определить катеты прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 73 см, а площадь равна 1320 см^2 .

44. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10 см, а площадь равна 48 см^2 . Определить основание.

45. 1) Определить площадь ромба, диагонали которого равны 72 см и 40 см.

2) Определить высоту ромба, если его диагонали равны 16 м и 12 м.

46. Определить сторону ромба, если его диагонали относятся, как $m:n$, а площадь равна Q .

47. Из середины основания треугольника проведены прямые, параллельные сторонам. Доказать, что площадь полученного таким образом параллелограмма равна половине площади треугольника.

48. Если какую-нибудь точку внутри параллелограмма соединить со всеми его вершинами, то сумма площадей двух противолежащих треугольников равна сумме площадей двух других. Доказать это.

49. Превратить треугольник в равновеликий ему параллелограмм.

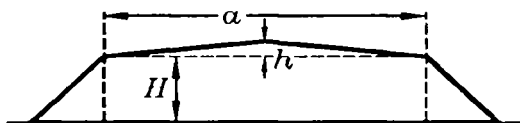


Рис. 47.

50. Превратить данный многоугольник в равновеликий ему многоугольник, число сторон которого на одну меньше, чем у данного многоугольника.

51. Ширина полотна дороги $a=6,74$ м (рис. 47), стрела (h) подъема полотна над насыпью должна составлять 2% ширины полотна, высота насыпи $H=1,5$ м, и откосы наклонены к линии горизонта под углом в 45° . Вычислить площадь поперечного сечения дороги.

52. Определить площадь треугольника, если основание равно a , а углы при основании 30° и 45° .

53. Равные прямоугольные треугольники ACB и ADB находятся по одну сторону от общей гипотенузы AB ; при этом $AD=BC=12$ см и $AC=BD=16$ см. Определить площадь общей части данных треугольников.

54. На сторонах равностороннего треугольника построены квадраты, и свободные вершины их соединены. Определить площадь полученного шестиугольника, если сторона данного треугольника равна a .

55. Данный квадрат со стороной a срезан по углам так, что образовался правильный восьмиугольник. Определить площадь этого восьмиугольника.

56. Отношение катетов прямоугольного треугольника равно 1,05; разность между радиусами описанного и вписанного кругов 17 дм. Определить площадь треугольника.

57. В ромбе, диагонали которого равны 150 см и 200 см, проведены из вершины тупого угла высоты, и концы их соединены. Определить площадь получившегося таким образом треугольника.

58. AB и CD — два параллельных отрезка; M — точка пересечения линий AD и BC (соединяющих концы отрезков накрест). Отрезок $AB=8$ см, отрезок $CD=12$ см, расстояние между ними равно 10 см. Определить сумму площадей треугольников ABM и MCD .

Формула Герона

59. Определить площадь треугольника по трем данным сторонам: 1) 13; 14; 15. 2) 29; 25; 6. 3) 5; 6; 9. 4) 3; 5; 7. 5) 6; 5; 2,2. 6) 5; $8\frac{2}{3}$; $12\frac{1}{3}$. 7) 5; 4; $\sqrt{17}$. 8) 5; $\sqrt{58}$; $\sqrt{65}$. 9) $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{13}$.

60. 1) Определить меньшую высоту треугольника, стороны которого равны: 25 дм; 29 дм; 36 дм.

2) Определить большую высоту треугольника со сторонами: 15; 112; 113.

61. Определить стороны треугольника: 1) если они относятся, как 26:25:3, а площадь треугольника равна 9 м^2 ; 2) если стороны относятся, как 9:10:17, а площадь равна 144 см^2 .

62. Определить площадь четырехугольника по диагонали, равной 17 см, и сторонам: 10 см и 21 см, лежащим по

одну сторону диагонали, 8 см и 15 см — по другую сторону диагонали.

63. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 17 см и 39 см, а расстояние между центрами 44 см. Определить длину общей хорды.

64. Определить площадь параллелограмма, если одна из его сторон равна 51 см, а диагонали равны 40 см и 74 см.

65. Определить площадь треугольника, если две стороны его соответственно равны 27 см и 29 см, а медиана третьей стороны равна 26 см.

66. В треугольнике по данным двум сторонам и площади определить третью сторону: 1) $a=17$, $b=28$, $S=210$; 2) $a=7$, $b=11$, $S=\sqrt{1440}$.

67. В треугольнике ABC даны три стороны: $AB=26$, $BC=30$ и $AC=28$. Определить часть площади этого треугольника, заключенную между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины B .

68. Стороны треугольника 13 см, 14 см и 15 см. Определить радиус окружности, которая имеет центр на средней стороне и касается двух других сторон.

69. Вершины данного треугольника соединены с центром вписанного круга. Проведенными прямыми площадь треугольника разделилась на три части: 28 м^2 , 60 м^2 и 80 м^2 . Определить стороны данного треугольника.

70. В четырехугольнике $ABCD$ дано: $AB=26$ см, $BC=30$ см, $CD=14$ см, $AD=25$ см и диагональ $AC=28$ см. Определить площадь четырехугольника и диагональ BD .

Площадь трапеции

71. 1) Основания трапеции равны 35 см и 29 см, а площадь 256 см^2 . Определить высоту трапеции.

2) В трапеции высота равна 8 см, а площадь 2 дм^2 . Определить длину средней линии.

3) Площадь трапеции равна 144 см^2 , основания относятся, как 4:5; высота равна 16 см. Определить основания.

72. Определить площадь поперечного сечения стрелкового окопа (рис. 48). Размеры даны в метрах.

73. Вычислить площадь поперечного сечения реки, данного на рисунке 49 (площадь «живого сечения»), по данным в таблице размерам глубины.

Расстояние от берега в метрах	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Глубина в метрах	0	0,65	0,9	1,5	1,85	2,4	2,35	1,75	1,25	0,6	0

74. Рисунок 50 представляет собой план столовой в рабочем клубе: размеры даны в метрах. Определить площадь столовой.

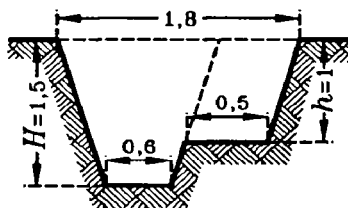


Рис. 48.

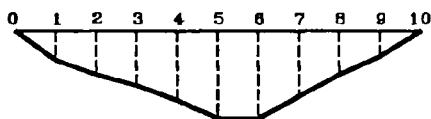


Рис. 49.

75. Для изготовления костюма военной маскировки пользуются выкройкой, указанной на рисунке 51; размеры даны в сантиметрах. Вычислить площадь выкройки.

76. 1) Площадь трапеции $ABCD$ разделена пополам прямой EF , проведенной параллельно боковой стороне AB . Определить отрезок AF , если $AD=28$ см и $BC=12$ см.

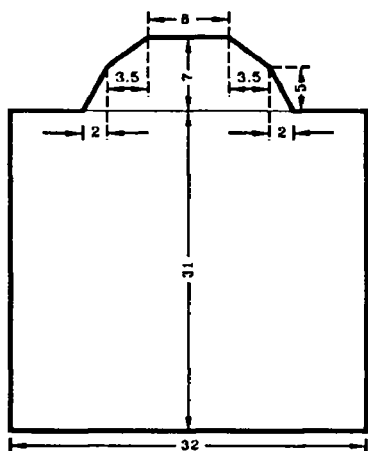


Рис. 50.

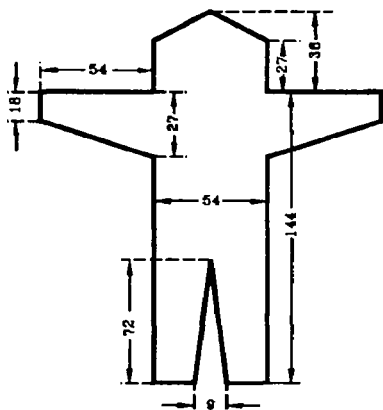


Рис. 51.

2) Площадь трапеции делится диагональю в отношении 3:7. В каком соотношении она делится средней линией (начиная от меньшего основания)?

77. В равнобедренной трапеции основания равны 51 см и 69 см, а боковая сторона 41 см. Определить площадь.

78. Определить площадь равнобедренной трапеции, в которой основания равны 42 см и 54 см, а угол при большем основании равен 45° .

79. В прямоугольной трапеции острый угол при основании равен 30° , сумма оснований равна m и сумма боковых сторон равна n . Определить площадь трапеции.

80. Определить площадь трапеции, у которой параллельные стороны 60 см и 20 см, а непараллельные 13 см и 37 см.

81. В равнобедренной трапеции большее основание равно 44 м, боковая сторона равна 17 м и диагональ равна 39 м. Определить площадь этой трапеции.

82. 1) Определить площадь равнобедренной трапеции, у которой основания равны 12 см и 20 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.

2) Определить площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, а высота равна h .

83. Определить площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ равна c и образует с большим основанием угол в 45° .

84. Определить площадь равнобедренной трапеции, у которой основания равны 10 см и 26 см, а диагонали перпендикулярны к боковым сторонам.

85. Определить площадь трапеции, у которой основания равны 142 см и 89 см, а диагонали 120 см и 153 см.

86. В круге радиуса R по одну сторону центра проведены две параллельные хорды, стягивающие дуги в 60° и 120° , и концы их соединены. Определить площадь полученной трапеции.

87. В равнобедренной трапеции, описанной около круга, боковая сторона равна a , а острый угол при основании равен 30° . Определить площадь этой трапеции.

88. 1) Основание треугольника равно 75 см, а боковые стороны 65 см и 70 см. Высота разделена в отношении 2:3 (считая от вершины), и через точку деления проведена прямая, параллельная основанию. Определить площадь получившейся при этом трапеции.

2) Диагонали трапеции 20 м и 15 м; высота равна 12 м. Определить площадь трапеции.

89. Основания и боковая сторона равнобедренной трапеции относятся, как 10:4:5. Площадь ее равна 112 см^2 . Найти периметр трапеции.

Площадь многоугольника

90. На рисунке 52 дан план участка земли в масштабе 1:10000. На плане измерены его диагонали d_1 и d_2 и высоты h_1, h_2, h_3 . Дано: $d_1=44 \text{ мм}$, $d_2=50 \text{ мм}$, $h_1=7 \text{ мм}$, $h_2=20,4 \text{ мм}$, $h_3=21,6 \text{ мм}$. Выразить площадь участка в гектарах.

91. Вычислить площадь участка земли, план которого дан на рисунке 53; размеры даны в метрах.

92. Определить площадь четырехугольника, если его диагонали равны k и l и 1) взаимно перпендикулярны; 2) образуют угол в 30° .

93. На сторонах прямоугольника построены вне его равносторонние треугольники и свободные вершины их соединены. Определить площадь получившегося четырехугольника, если стороны данного прямоугольника равны a и b .

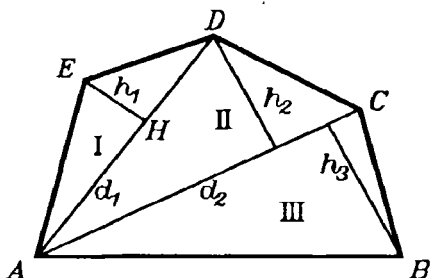


Рис. 52.

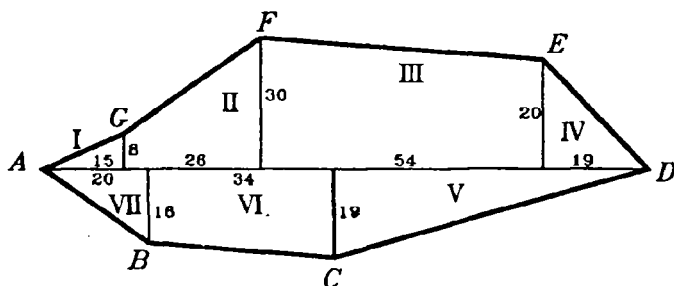


Рис. 53.

94. На отрезке AE взята точка C так, что $AC=a$ и $CE=b$. На отрезках AC и CE построены по одну сторону равносторонние треугольники ABC и CDE, и вершины B и D соединены. Определить площадь четырехугольника ABDE.

95. Пусть M будет середина стороны AD в четырехугольнике ABCD. Дано: $MB \perp AB$; $MC \perp CD$; $AD=50 \text{ см}$, $AB=15 \text{ см}$ и $CD=7 \text{ см}$. Требуется определить площадь ABCD.

96. На окружности радиуса r последовательно взяты дуги: $AB=30^\circ$, $BC=60^\circ$, $CD=90^\circ$ и $DE=120^\circ$ и составлен пятиугольник $ABCDE$. Определить площадь этого пятиугольника.

97. 1) Периметр описанного многоугольника равен 60 см, а площадь содержит 240 см^2 . Определить радиус круга.

2) Около окружности радиуса, равного 25 см, описан многоугольник, площадь которого равна 20 дм^2 . Определить его периметр.

98. Определить площадь правильного треугольника, описанного около окружности радиуса r .

99. Сторона правильного шестиугольника равна 84 см; вычислить сторону равновеликого ему правильного треугольника.

100. Пол в комнате желают выстлать паркетом в форме правильного шестиугольника со стороной в 12 см. Предполагаемая к покрытию таким паркетом площадь пола имеет следующие размеры: 7,48 м в длину и 3,25 м в ширину. Определить нужное число паркетных плиток.

101. Комната длиной 5,6 м и шириной 4,5 м имеет балкон в форме половины правильного шестиугольника со стороной 1,6 м. Определить площадь пола комнаты и балкона.

102. 1) По данному радиусу R определить площадь правильного вписанного шестиугольника.

2) По данному радиусу r определить площадь правильного описанного шестиугольника.

3) Определить сторону правильного шестиугольника по его площади S .

103. По данному радиусу R определить площадь правильных вписанных восьмиугольника и двенадцатиугольника.

104. Сечение железобетонной сваи имеет вид правильного восьмиугольника. Наибольшее расстояние между противоположными вершинами равно 224 мм. Определить площадь сечения.

105. Расстояние между противоположными гранями восьмигранного железа равно 36 мм. Вычислить площадь поперечного сечения.

106. 1) По данной площади Q правильного вписанного двенадцатиугольника определить площадь правильного шестиугольника, вписанного в ту же окружность.

2) По данной площади Q правильного вписанного восьмиугольника определить площадь квадрата, вписанного в ту же окружность.

107. 1) Окружность радиуса R разделена на шесть равных частей, и точки деления соединены через одну. Определить площадь полученной шестиугольной звезды.

2) Окружность радиуса R разделена на восемь равных частей, и точки деления соединены через одну. Определить площадь полученной восьмиугольной звезды.

Сравнение площадей треугольников и многоугольников

108. 1) Всякая прямая, проходящая через центр симметрии параллелограмма, делит его на две равновеликие части. Доказать.

2) Провести через данную точку прямую, делящую площадь данного параллелограмма пополам.

109. Разделить данный параллелограмм на n равновеликих частей прямыми, исходящими из его вершины, если: 1) $n=6$; 2) $n=5$.

110. Середина одной из диагоналей четырехугольника соединена с концами другой диагонали. Доказать, что полученная ломаная делит четырехугольник на две равновеликие части.

111. Если диагональ какого-нибудь четырехугольника делит другую диагональ пополам, то она делит пополам и площадь четырехугольника. Доказать.

112. 1) Прямая, проходящая через середины параллельных сторон трапеции, делит ее на две равновеликие части. Доказать.

2) На прямой, соединяющей середины оснований трапеции, взята точка и соединена со всеми вершинами трапеции. Доказать, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам трапеции, равновелики.

113. 1) Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Доказать, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.

2) Если в трапеции середину M одной боковой стороны AB соединить с концами другой боковой стороны CD , то площадь полученного треугольника CMD составит половину площади трапеции. Доказать.

114. Диагональ трапеции делит ее площадь в отношении 3:7. В каком отношении разделится площадь этой трапеции, если из конца верхнего основания провести прямую, параллельную боковой стороне?

115. 1) Построить квадрат, равновеликий сумме двух данных квадратов со сторонами a и b ($a=5$ см и $b=12$ см).

2) Построить квадрат, площадь которого в три раза больше площади данного квадрата со стороной a .

116. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты, и свободные вершины их соединены. Определить площадь получившегося шестиугольника, если катеты данного треугольника равны a и b .

117. Как относятся между собой площади P и Q двух треугольников, имеющих по равному углу, заключенному в первом треугольнике между сторонами в 12 дм и 28 дм, а во втором — между сторонами в 21 дм и 24 дм?

118. В треугольнике ABC сторона BA продолжена на длину $AD=0,2BA$ и сторона BC — на длину $CE=\frac{2}{3}BC$; точки D и E соединены. Найти отношение площадей треугольников ABC и DBE .

119. Свойство биссектрисы треугольника вывести из сравнения площадей.

120. Во сколько раз увеличится площадь треугольника, если каждую сторону увеличить в 4 раза? в 5 раз?

121. Сторона треугольника равна 5 дм. Чему равна сходственная сторона подобного ему треугольника, площадь которого вдвое больше.

122. Какую часть площади (считая от вершины) отсекает средняя линия треугольника?

123. Высота треугольника равна h . На каком расстоянии от вершины находится параллель к основанию, делящая площадь треугольника пополам?

124. 1) Боковая сторона треугольника разделена в отношении 2:3:4 (от вершины к основанию), и из точек деления проведены прямые, параллельные основанию. В каком отношении разделилась площадь треугольника?

2) Через точку E , делящую сторону AB треугольника ABC в отношении $m:n$, проведена параллель к BC . В каком отношении находятся площадь отсеченного треугольника и площадь получившейся трапеции?

125. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его боковую сторону в отношении 5:3 (начиная от вершины), а площадь — на части, разность которых равна 56 см^2 . Определить площадь всего треугольника.

126. Прямыми, параллельными основанию, площадь треугольника разделилась в отношении 9:55:161 (от вершины к основанию). В каком отношении разделились боковые стороны?

127. Какую часть площади одноименных описанных фигур составляют площади следующих вписанных: 1) правильного треугольника; 2) квадрата; 3) правильного шестиугольника? (Решить, не вычисляя самих площадей.)

128. Сумма площадей трех подобных многоугольников равна 232 дм^2 , а периметры их относятся, как 2:3:4. Определить площадь каждого многоугольника.

129. На сторонах прямоугольного треугольника построены подобные фигуры, причем стороны треугольника являются сходственными сторонами этих фигур. Доказать, что площадь фигуры, построенной на гипотенузе, равна сумме площадей фигур, построенных на катетах.

130. 1) Построить квадрат, равновеликий разности двух данных квадратов.

2) Построить квадрат, равновеликий сумме n данных квадратов.

131. Построить треугольник, равновеликий данному многоугольнику.

132. Дано отношение сторон двух квадратов и один из них; построить другой квадрат.

133. В параллелограмме соединены середина каждой стороны с концом следующей стороны, отчего получился внутренний параллелограмм. Доказать, что его площадь составляет $\frac{1}{5}$ площади данного параллелограмма.

134. Как относятся между собой основания такой трапеции, которая равновелика своему дополнительному треугольнику?

135. Площадь прямоугольного треугольника разделена пополам прямой, перпендикулярной к гипотенузе. Найти расстояние между этой прямой и вершиной меньшего острого угла, если больший катет равен 20 м.

136. В прямоугольном треугольнике катеты относятся, как 3:4, а высота делит площадь треугольника на части, раз-

ность которых равна 84 дм^2 . Определить площадь всего треугольника.

137. 1) Три медианы треугольника ABC пересекаются в точке M . Доказать, что площадь треугольника AMB составляет треть площади треугольника ABC .

2) Три медианы треугольника делят его площадь на шесть равных частей. Доказать.

138. Из внешней точки A проведены к кругу касательная AB и секущая ACD . Определить площадь треугольника CBD , если $AC:AB=2:3$ и площадь $\triangle ABC=20 \text{ дм}^2$.

139. AB и CD — две непересекающиеся хорды, причем $\angle A=120^\circ$ и $\angle D=90^\circ$; M — точка пересечения хорд AB и BC . Определить площади AMB и CMD , если их сумма содержит 100 см^2 .

140. AB — диаметр; BC и AC — хорды, причем $\angle C=60^\circ$; D — точка пересечения продолженного диаметра и касательной CD . Найти отношение площадей DCB и DCA .

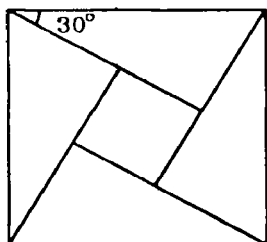


Рис. 54.

141. Каждая сторона квадрата повернута на 30° внутрь квадрата, как указано на рисунке 54. Определить отношение сторон и площадей данного квадрата, образованного повернутыми сторонами.

142. $ABCD$ — данный квадрат; E и F — середины сторон CD и AD ; M — точка пересечения прямых BE и FC . Доказать, что площадь $\triangle BMC$ составляет $1/5$ площади квадрата.

143. Треугольник и вписанный в него ромб имеют общий угол. Стороны треугольника, заключающие этот угол, относятся, как $m:n$. Найти отношение площади ромба к площади треугольника.

§ 14. Определение в треугольнике: медиан, биссектрис и радиусов описанного и вписанного кругов

Вычисление медиан

1. Стороны треугольника равны a , b и c . Доказать, что медиана m_c , проведенная к стороне c , равна $\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$.

2. 1) Основание треугольника равно 22 дм, а боковые стороны 13 дм и 19 дм. Определить медиану основания.

2) Определить все медианы треугольника, в котором $a=2$, $b=3$, $c=4$.

3. В треугольнике две стороны равны 11 и 23 и медиана третьей стороны 10. Найти третью сторону.

4. В треугольнике одна из сторон равна 26 дм, а ее медиана равна 16 дм. Определить две другие стороны этого треугольника, если они относятся, как 3:5.

5. Медианы равнобедренного треугольника равны 15, 15 и 18. Найти площадь треугольника.

6. Основание треугольника равно 23; медианы боковых сторон равны 15 и $22\frac{1}{2}$. Найти третью медиану.

7. 1) Построить треугольник по основанию и двум медианам, исходящим из концов основания.

2) Основание треугольника равно 10, а медианы двух других сторон равны 9 и 12. Найти площадь треугольника.

8. 1) Построить треугольник по трем медианам.

2) Медианы треугольника равны 9, 12 и 15. Найти площадь треугольника.

Биссектрисы

9. Квадрат биссектрисы угла при вершине треугольника равен разности между произведением боковых сторон и произведением отрезков основания. Доказать.

10. В треугольнике ABC определить биссектрису угла A при следующей длине сторон: 1) $a=7$, $b=6$, $c=8$; 2) $a=18$, $b=15$, $c=12$; 3) $a=39$, $b=20$, $c=45$.

11. В треугольнике две стороны равны 6 и 12, а угол между ними 120° . Определить биссектрису данного угла.

12. По данным двум сторонам треугольника и биссектрисе угла между ними определить отрезки третьей стороны: $b=20$; $c=45$; $b_A=24$.

Радиусы вписанного и описанного кругов

13. 1) Доказать, что в прямоугольном треугольнике радиус вписанного круга равен половине разности между суммой катетов и гипотенузой.

2) Катеты равны 40 см и 42 см. Определить радиусы кругов описанного и вписанного.

14. Определить относительное положение центра описанного около треугольника круга, если даны три стороны треугольника или отношение их: 1) 5, 8, 10; 2) 8, 7, 5; 3) 80, 315, 325.

15. Доказать, что во всяком треугольнике произведение двух сторон равно произведению диаметра описанного круга на высоту, опущенную на третью сторону.

16. Площадь треугольника равна S ; его периметр равен $a+b+c=2p$. Доказать, что: 1) радиус вписанного круга $r = \frac{S}{p}$;

2) радиус описанного круга $R = \frac{abc}{4S}$.

17. Для треугольника определить R и r при следующей длине сторон: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7.

18. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 6, высота равна 4. Найти радиус описанного круга.

19. В круг радиуса R вписан треугольник; один из его углов равен: 1) 30° ; 2) 45° . Найти противолежащую сторону треугольника.

20. Доказать справедливость формулы:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

21. Определить площадь треугольника по данному радиусу R описанного круга и двум углам, содержащим 45° и 60° .

22. Определить катеты прямоугольного треугольника, если они относятся между собой, как 20:21, а разность между радиусами кругов описанного и вписанного равна 17 см.

23. В круг радиуса R вписан прямоугольник $ABCD$. Определить площадь этого прямоугольника, если дуга AB содержит α градусов [α равно: 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 60° ; 4) 90°].

§ 15. Длина окружности и дуги. Площадь круга и его частей

Длина окружности и дуги

1. Вычислить длину окружности, если радиус равен:

1) 10 м; 2) 15 м; 3) 35 см.

2. Вычислить радиус, если длина окружности равна:
1) 1 м; 2) 25 см; 3) 4,75 дм.

3. Расстояние между серединами двух зубцов зубчатого колеса, имеющего 0,66 м в диаметре, равно 34,5 мм, считая по дуге. Сколько зубцов имеет колесо?

4. Шкив имеет в диаметре 1,4 м и делает 80 оборотов в минуту. Определить скорость точки, лежащей на окружности шкива.

5. По данному радиусу R определить длину дуги, содержащей: 1) 45° ; 2) $24^\circ 30'$; 3) $5^\circ 14' 15''$.

6. Определить радиус дуги, если ее длина равна l , а градусная мера: 1) 135° ; 2) $10^\circ 40'$.

7. Окружность шкива (рис. 55) имеет длину 540 мм, ремень касается шкива по дуге длиной 200 мм. Определить угол обхвата шкива ремнем (α).

8. Радиус железнодорожного закругления равен 1200 м; длина дуги равна 450 м. Сколько градусов содержит дуга?

9. 1) Окружность радиуса 2 см разогнута в дугу радиуса 5 см. Найти получившийся центральный угол.

2) Дуга радиуса 4 см, измеряющая центральный угол в 120° , равна длине некоторой окружности. Найти радиус этой окружности.

3) Окружность радиуса 6 см разогнута в дугу, измеряющую центральный угол в 300° . Найти радиус дуги.

10. Определить число градусов дуги, если дан ее радиус R и длина l : 1) $R=10$, $l=45$; 2) $R=15$, $l=6$.

11. Сколько градусов и минут в дуге, длина которой равна радиусу ($\frac{1}{\pi} \approx 0,31831$)?

12. По данной хорде a определить длину ее дуги, если она содержит: 1) 60° ; 2) 90° ; 3) 120° .

13. По данной длине дуги l определить ее хорду, если дуга содержит: 1) 60° ; 2) 90° ; 3) 120° .

14. Определить радиус окружности, если она длиннее своего диаметра на 107 см.

15. 1) На сколько увеличится длина окружности, если радиус увеличить на m ?

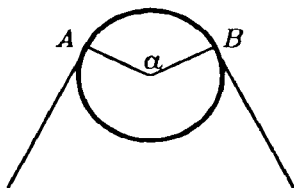


Рис. 55.

2) Вообразим, что земной шар обтянут по экватору обручем и что подобным же образом обтянут и футбольный мяч по его большому кругу. Далее вообразим, что окружность каждого обруча удлинилась на 1 м. Тогда обручи отстанут от поверхности тел, которые они раньше стягивали, и останется некоторый зазор (промежуток). Где этот зазор был бы больше: у земного шара или мяча?

16. 1) Железная труба со стенками толщиной в 6 мм имеет внешнюю окружность в 22 см. Найти длину внутренней окружности.

2) Из двух concentрических окружностей одна равна 167 см, а другая 117 см. Определить ширину кольца.

17. Определить длину окружности, если она более периметра правильного вписанного шестиугольника на 7 см.

18. Дуга сегмента содержит 120° и имеет длину l . Определить длину окружности, вписанной в этот сегмент.

19. Из концов дуги ABC , содержащей 120° , проведены касательные до взаимного пересечения в точке D , и в полученную фигуру $ABCD$ вписана окружность. Доказать, что длина этой окружности равна длине дуги ABC .

20. На рисунке 56 даны вид и размеры в сантиметрах коленчатой трубы паровой машины. Найти ее длину. (Ее длина измеряется по

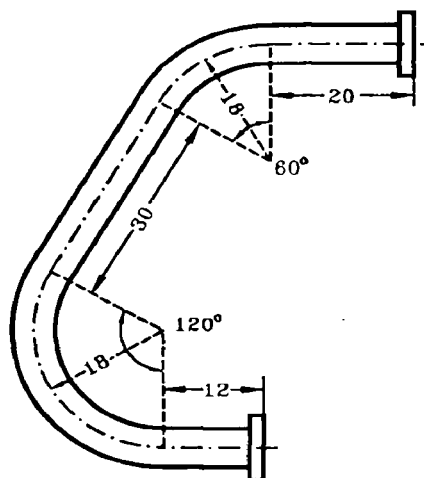


Рис. 56.

средней пунктирной линии.)

21. Найти радиус такой окружности, длина и площадь круга которой выражаются одним и тем же числом.

22. Определить относительную погрешность при замене длины полуокружности $\frac{1}{2}C$ через $a_3 + a_4$ (для приближенного спрямления окружности).

23. Одно из приближенных спрямлений окружности состоит в том, что ее заменяют периметром прямоугольного треугольника, у которого один катет равен $\frac{6}{5}$ диаметра, дру-

гой катет составляет $\frac{3}{5}$ диаметра. Определить абсолютную погрешность.

Площадь круга

24. Определить площадь круга при следующей длине радиуса: 1) 10 м; 2) 4 дм; 3) 2,6 см (взять $\pi=3,14$).

25. Определить радиус круга, если его площадь равна: 1) 2 см²; 2) 50 м²; 3) 17 дм².

26. Ручная граната образца 1914 г. при взрыве дает осколочное поражение не далее 45 м от места взрыва. Определить площадь поражения этой гранаты.

27. Найти площадь круга поршня воздушного насоса, диаметр которого 10 см.

28. Поршень насоса имеет площадь сечения 12,56 см². Найти диаметр поршня.

29. Дерево имеет 1,884 м в обхвате. Чему равна площадь его поперечного сечения, имеющего (приблизительно) форму круга?

30. Какой груз выдерживает пеньковый канат, имеющий 18 см в окружности, если допускаемая нагрузка равна 100 кг/см²?

31. 1) Определить площадь круга, если длина окружности равна 8 см.

2) Определить длину окружности, если площадь круга равна 18 см².

32. 1) Пропускная способность трубы III (рис. 57) та же, что и у труб I и II вместе. Определить построением величину x по данным на рисунке размерам.

2) Две трубы с диаметром в 6 см и в 8 см требуется заменить одной трубой той же пропускной способности. Найти диаметр этой трубы.

33. Определить площадь круга, если площадь вписанного квадрата равна F .

34. Вычислить площадь круга, если она меньше площади описанного квадрата на 4,3 м².

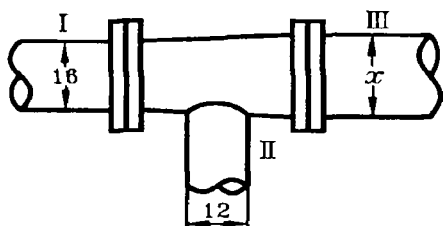


Рис. 57.

35. Найти отношение между площадями вписанного и описанного кругов: 1) для правильного треугольника; 2) для квадрата; 3) для правильного шестиугольника.

Площадь кольца

36. Вертикальный цилиндрический котел 78 см в диаметре и весящий 752 кг имеет в днище круглое отверстие, наружный диаметр которого равен 36 см. Всей площадью своего днища котел опирается на фундамент. Определить давление, оказываемое котлом вследствие его тяжести на 1 см^2 поверхности фундамента.

37. В кольце, образованном двумя концентрическими окружностями, хорда большей окружности, касающаяся меньшей, равна a . Определить площадь кольца.

38. Круга касаются шесть равных ему кругов, касающихся также между собой, и полученное соединение семи равных кругов охвачено таким концентрическим кольцом, которое равновелико их сумме. Доказать, что ширина кольца равна радиусу кругов.

Сектор и сегмент

39. Определить площадь сектора, если радиус равен r , а дуга содержит: 1) $67^\circ 30'$; 2) $15^\circ 45'$.

40. Определить радиус сектора, если его площадь равна q , а центральный угол равен: 1) 72° ; 2) $36'$.

41. Радиус сектора равен r , а площадь равна q . Определить величину центрального угла (или дуги).

42. Определить площадь сегмента, если радиус равен R , а дуга содержит: 1) 90° ; 2) 60° ; 3) 45° ; 4) 30° .

43. Определить площадь сегмента, если хорда равна a , а дуга содержит: 1) 120° ; 2) 90° ; 3) 60° .

Площадь фигур, ограниченных прямыми и дугами окружностей

44. Определить площадь окна (рис. 58), имеющего форму прямоугольника, законченного сверху дугой круга в 60° ; высота окна, считая от середины дуги до основания, равна 2,4 м, ширина его 1,6 м.

45. 1) Полуокружность радиуса r разделена на три равные части, и точки деления соединены с концом диаметра. Определить площадь средней части полуокруга.

2) Концы дуги CD одинаково удалены от концов диаметра AB . Определить площадь, заключенную между дугой CD и хордами AC и AD , если площадь круга равна Q и дуга CD содержит n° .

46. В круге радиуса R проведены по одну сторону центра две параллельные хорды, из которых одна стягивает дугу в 120° , а другая в 60° . Определить часть площади круга, заключенную между хордами.

47. Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна a и стягивает в одном круге дугу в 60° , а в другом — дугу в 90° . Определить площадь общей части кругов (два случая).

48. Площадь круга Q . Определить площадь вписанного в него прямоугольника, стороны которого относятся, как $m:n$.

49. В круг радиуса R вписан прямоугольник, площадь которого составляет половину площади круга. Определить стороны этого прямоугольника.

50. Около круга, площадь которого равна Q , описан ромб с углом в 30° . Определить площадь этого ромба.

51. Около правильного треугольника с площадью Q описана окружность, и в тот же треугольник вписана окружность. Определить площадь кольца, заключенного между этими окружностями.

52. AMB — дуга, содержащая 120° ; OA и OB — радиусы; AC и BC — касательные; DME — дуга, описанная из центра C между CA и CB и касающаяся дуги AMB . Найти отношение между площадями секторов $CDME$ и $OAMB$.

53. Из концов дуги ACB проведены касательные до пересечения в точке D . Определить площадь $DACB$, заключенную между двумя касательными и дугой, если радиус равен R , а дуга содержит: 1) 90° ; 2) 120° ; 3) 60° .

54. Из центра равностороннего треугольника описана окружность, пересекающая его стороны так, что внешние дуги содержат по 90° . Обозначая сторону этого треугольника

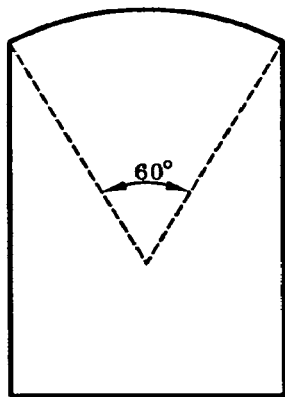


Рис. 58.

через a , определить площадь, ограниченную внутренними дугами и средними отрезками сторон.

55. 1) Во сколько раз увеличится площадь круга, если диаметр его увеличить в 3 раза? Во сколько раз площадь уменьшится, если радиус уменьшится в 5 раз?

2) Во сколько раз надо уменьшить радиус круга, чтобы площадь уменьшилась в 4 раза? Во сколько раз надо увеличить диаметр круга, чтобы площадь увеличилась в 5 раз?

56. Можно ли водопроводную трубу диаметром в 50 мм заменить двумя трубами в 25 мм каждая? Одинакова ли площадь сечения одной большой трубы и двух малых?

57. Вычислить площадь заштрихованной части прямоугольника, данного на рисунке 59.

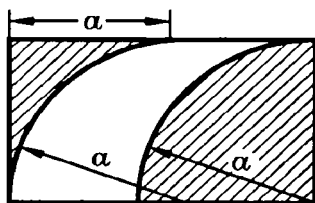


Рис. 59.

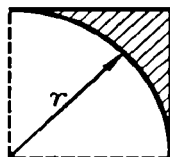


Рис. 60.

58. Определить площадь фигур, заштрихованных на рисунках 60—63, по данным размерам.

59. Два равных полуокруга наложены так, что диаметры их параллельны, а полуокружность одного проходит через центр другого. Определить площадь общей части полуокругов по данному их радиусу R .

60. На каждой стороне квадрата, принятой за диаметр, описана полуокружность, лежащая внутри квадрата. Определить площадь полученной розетки, если сторона квадрата равна a .

61. На сторонах ромба описаны, как на диаметрах, полуокружности, обращенные внутрь. Диагонали ромба равны a и b . Определить площадь полученной розетки.

62. Диаметр разделен на равные части, из обоих его концов проведены полуокружности во все точки деления, причем из одного конца все полуокружности сверху, а из другого все снизу. Доказать, что полученными изогнутыми линиями круг разделится на части равной величины, а периметр каждой части равен длине окружности.

63. В равностороннем треугольнике проведены дуги между каждыми двумя вершинами через центр треугольника

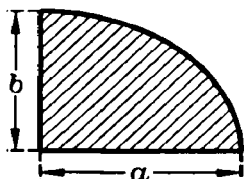


Рис. 61.

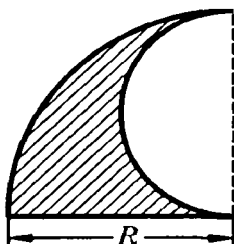


Рис. 62.

(рис. 64). Сторона треугольника равна a . Определить площадь полученной розетки.

64. Между точками A и B проведены две дуги, обращенные выпуклостью в одну сторону: дуга AMB содержит 240° и дуга ANB 120° . Расстояние между серединами этих дуг равно a . Определить площадь луночки (рис. 65).

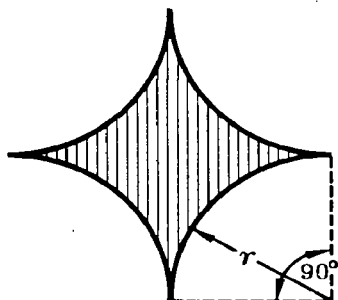


Рис. 63.

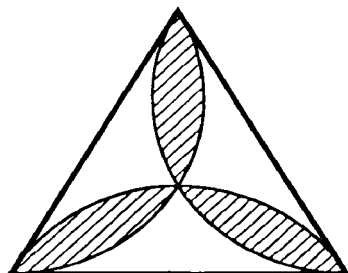


Рис. 64.

65. AB и CD — два взаимно перпендикулярных диаметра. Из точки D , как из центра, радиусом DA описана дуга AMB . Доказать, что луночка $AMBC$ равновелика треугольнику ABD .

66. Из точки C данной полуокружности опущен перпендикуляр CD на диаметр AB , и на отрезках AD и DB построены новые полуокружности по одну сторону с данной. Доказать, что площадь, заключенная между тремя полуокружностями, равна площади круга с диаметром CD .

67. Вычислить площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 66. Размеры даны в миллиметрах.

68. Вычислить площадь сечения, изображенного на рисунке 67. Размеры даны в миллиметрах.

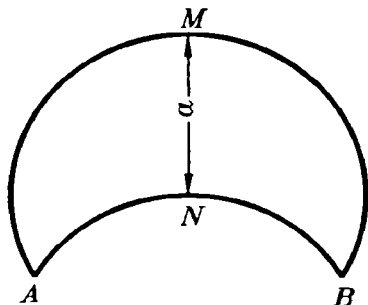


Рис. 65.

69. Определить площадь поперечного сечения фасонного железа, изображенного на рисунке 68.

70. Две параллельные хорды равны 14 м и 40 м, а расстояние между ними 39 м. Определить площадь круга.

71. Определить радиус круга, вписанного в данный сектор, если радиус сектора

равен R , а дуга содержит α градусов [α равно 1) 60° ; 2) 90° ; 3) 120°].

§ 16. Приложение алгебры к геометрии. Деление в среднем и крайнем отношении

Построение формул

1. 1) Построить отрезки, равные $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$.

2) На рисунке 69 дано: $OA=AB=BC=CD=DE=EF=FG=GH=HK=KL=1$, причем $AB \perp AO$, $BC \perp BO$, $CD \perp CO$ и т. д. Вычислить: OB , OC , OD , OE , OF , OG , OH , OK , OL .

3) Построить отрезки, равные: $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $2\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\frac{3}{5}\sqrt{6}$.

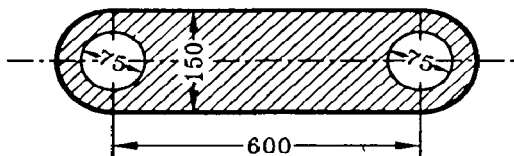


Рис. 66.

2. Построить треугольник со сторонами: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$.

3. Указать измерения следующих выражений, в которых каждая буква, кроме π , обозначает длину отрезка:

- 1) $3,5a$; 2) $2\pi R$; 3) $R\sqrt{3}$; 4) $\frac{bh}{2}$; 5) abc ; 6) $\pi r^2 h$; 7) $\frac{abc}{d}$;
8) $\frac{3a}{2b+c-4d}$; 9) $\sqrt{ab}$; 10) $0,5\pi D$; 11) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$;

- 12) $\sqrt[3]{a^2 h}$; 13) $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; 14) $2\pi R^2 + 2\pi RH$; 15) $\frac{\pi D^2 H}{4}$;
 16) $\frac{(a+b)h}{2}$; 17) $\frac{4}{3}\pi R^3$; 18) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

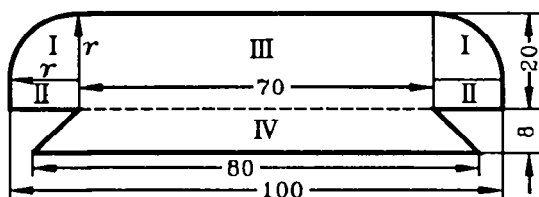


Рис. 67.

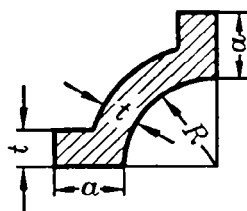


Рис. 68.

4. Какие из следующих формул неоднородны:

- 1) $x = \frac{ab}{c} + \frac{b^2}{d} - 3a$; 2) $x = \sqrt{c-2}$; 3) $x^2 = \frac{a^3 - b^3}{a+b}$;
 4) $x=2$; 5) $x=a+bc^2$; 6) $x = \frac{a}{b}$?

5. Построить треугольник со сторонами: $a=2+\sqrt{3}$,

$$b = \sqrt{3} - 1, c = 2\sqrt{3}.$$

6. Построить отрезки, выражаемые следующими формулами:

- 1) $x=3\frac{1}{2}a$; 2) $x=a-(b+3d)$;
 3) $x=3c-(2m-n)$; 4) $x = \frac{2ab}{3c}$;
 5) $x = \frac{ab}{c+d}$; 6) $x = \frac{a^2}{b}$; 7) $x=\pi r$;
 8) $x = \frac{pqr}{st}$; 9) $x = \frac{ab}{c-d}$.

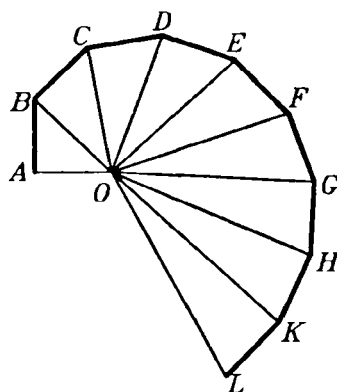


Рис. 69.

7. Построить отрезки, выражаемые следующими формулами:

- 1) $x = \sqrt{3ab}$; 2) $x = \sqrt{\frac{a^2 b}{c}}$; 3) $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$; 4) $x = \sqrt{4a^2 - b^2}$;
 5) $x = \sqrt{b^2 + 3c^2}$; 6) $x = a\sqrt{\frac{a+c}{b+d}}$.

Построение фигур

8. Построить квадрат, равновеликий данному равнобедренному треугольнику со стороной a .

9. Построить круг, площадь которого вдвое больше площади данного круга с радиусом R .

10. Данный круг с радиусом R разделить пополам концентрической окружностью.

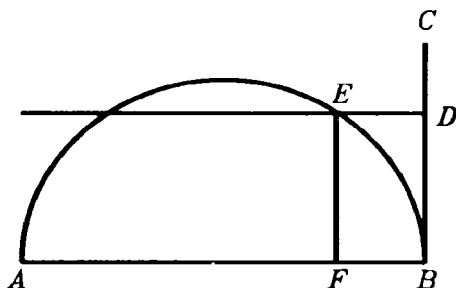


Рис. 70.

11. Построить квадрат, равновеликий $\frac{3}{5}$ параллелограмма со стороной a и опущенной на нее высотой h .

12. Построить круг, равновеликий кольцу между двумя концентрическими окружностями с радиусами R и r .

13. По данному основанию a и прилежащему к нему углу в 30° построить треугольник, равновеликий данному треугольнику с основанием b и высотой h .

Построение корней квадратного уравнения

14. Построить корни квадратных уравнений $x^2 \pm px \pm q^2 = 0$.

15. 1) На AB , как на диаметре (рис. 70), описана полуокружность. Дано: $AB=p$; $BC \perp AB$; $BD=q$; $DE \parallel AB$; $EF \perp AB$. Доказать, что отрезки AF и FB служат корнями квадратного уравнения $x^2 - px + q^2 = 0$.

2) Применить рассмотренное построение к построению корней уравнения: $x^2 - 6,5x + 4 = 0$, не решая уравнения.

3) Почему применение этого способа к уравнению $x^2 - 2,5x + 9 = 0$ не дает желаемых результатов?

Деление в среднем и крайнем отношении

16. Разделить данный отрезок a в среднем и крайнем отношении, т. е. разделить его на две части так, чтобы

большая часть была средней пропорциональной между всем отрезком и его меньшей частью.

17. 1) Доказать, что сторона правильного вписанного десятиугольника равна большему отрезку радиуса, разделенного в среднем и крайнем отношении.

2) По данному R вычислить a_{10} .

18. Если какой-нибудь отрезок разделен в среднем и крайнем отношении, то большая часть составляет приблизительно $\frac{5}{8}$ всего отрезка. Проверить это и определить степень точности такого приближения.

19. 1) Определить большую часть при делении отрезка в среднем и крайнем отношении, если меньшая часть равна b .

2) Если меньшую часть отрезка, разделенного в среднем и крайнем отношении, отложить на большей части, то большая часть также разделится в среднем и крайнем отношении. Доказать.

20. Диаметр разделен в среднем и крайнем отношении перпендикуляром, проведенным из точки окружности. Радиус окружности равен r . Найти длину перпендикуляра.

21. Доказать, что в правильном пятиугольнике две пересекающиеся диагонали взаимно делятся в среднем и крайнем отношении.

22. Если радиус круга разделить в среднем и крайнем отношении и, взяв большую часть, описать ею концентрическую окружность, то площадь данного круга также разделится в среднем и крайнем отношении, причем большей частью будет кольцо. Доказать это.

Применение алгебраического метода

23. На продолжении диаметра круга радиуса r найти такую точку, чтобы касательная, проведенная из нее к данному кругу, равнялась диаметру.

24. В данную полуокружность вписать квадрат.

25. Дан треугольник с основанием a и высотой h . Вписать в него прямоугольник, имеющий данный периметр $2p$.

26. Данный треугольник разделить пополам прямой, параллельной его основанию.

27. Площадь треугольника разделить пополам прямой, перпендикулярной к основанию.

28. Вписать в данный ромб прямоугольник, стороны которого были бы параллельны диагоналям ромба и площадь которого равнялась бы $\frac{1}{3}$ площади ромба.

29. В данный квадрат вписать равносторонний треугольник так, чтобы одна из вершин у них была общая.

30. В квадрат со стороной a вписать другой квадрат со стороной b .

31. Построить окружность, касающуюся данной окружности радиуса r и данной прямой в данной на ней точке.

32. Даны два прямоугольника. Построить третий прямоугольник, изопериметричный с одним из данных прямоугольников и равновеликий другому.

33. В данный треугольник вписать прямоугольник, основание которого относилось бы к высоте, как $m:n$.

34. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB=a$ и $BC=b$. Провести прямую EF так, чтобы она отсекала параллелограмм $ABEF$, подобный $ABCD$.

35. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB=a$ и $BC=b$. Провести прямую EF , параллельную AB , так, чтобы она разделила данный параллелограмм на два подобных между собой параллелограмма.

36. В углы A и C прямоугольника $ABCD$ вписать две равные окружности, которые касались бы между собой.

37. Через точки A и B провести окружность, отсекающую от данной прямой хорду данной длины m .

ОТВЕТЫ

§ 1.

2. 14 м. 3. 9,10 м. 4. 7 м. 5. 1 м. 8. 30 см. 9. 5,5 м. 10. $a=4,25$ см, $b=2,75$ см. 11. 0,6 м. 12. $AB:BC=1:(m-1)=1:4$. 13. 8,1 м. 14. 96 м. 17. 1) Да; 2) да; 3) нет. 18. 1) 3; 2) 6; 10; 190; $\frac{n(n-1)}{2}$.

§ 2.

6. 1) $124^\circ 33'$; 2) $144^\circ 9' 15''$; 3) $162^\circ 1' 55''$. 8. 1) $47^\circ 49' 30''$; 2) $41^\circ 17' 30''$; 3) $84^\circ 48' 42''$. 9. 1) 20° ; 2) $55^\circ 37'$; 3) $67^\circ 17' 22''$. 12. 1) $178^\circ 30'$; 2) $69^\circ 35'$; 3) $166^\circ 37' 30''$. 14. 1) $31^\circ 5'$; 2) $73^\circ 52' 30''$; 3) $24^\circ 35' 27''$, 5; 4) $20^\circ 7' 35''$. 16. 1) $3\frac{1}{2}$; 2) $2\frac{3}{4}$; 3) 0,7. 17. $1\frac{3}{7}d$. 18. $1\frac{5}{7}d$. 20. Продолжить AB или CB за точку B . 21. 36° и 144° . 22. $\frac{8}{9}d$ и $1\frac{1}{9}d$. 23. 54° . 24. Да. 25. Да. 26. $\frac{3}{16}d$. 28. 72° и 144° . 29. $\frac{1}{3}d; \frac{4}{9}d; \frac{5}{9}d; \frac{2}{3}d$. 30. 36° . 31. 20° ; $22^\circ 30'$. 32. $1\frac{8}{11}d$. 33. $\frac{4}{15}d; \frac{8}{15}d; 1\frac{1}{15}d; 2\frac{2}{15}d$. 34. $1\frac{2}{5}d; \frac{3}{5}d; 1\frac{2}{5}d$. 36. 70° . 37. $1\frac{5}{8}d$.

§ 3.

2. 10 м. 7. *Указание.* Сначала доказать равенство треугольников DBE и DGE . 9. Равносторонний. 11. 1) Можно получить два треугольника, один или ни одного. 13. 1) Да; 2) нет; 3) нет. 14. 1) Нет; 2) да. 15. 2 м. 16. 0,3 м. 17. 10 м. 18. 10 см, 10 см, 1 см. 19. *Указание.* По теореме: $a < b + c$ прибавить к обеим частям неравенства по a . 20. *Указание.* Каждая сторона треугольника меньше суммы отрезков, соединяющих выбранную точку с ее концами. 21. 13 м. 22. 15 м. 23. 10 м. 24. 8 м. 29. Дорога должна проходить через середину отрезка, соединяющего точки B и C . 30. *Указание.* Построить точку, симметричную с одной из данных точек относительно AB , и соединить ее с другой данной точкой. 32. Лишь внутри остроугольного треугольника. 33. *Указание.* Построить окружность с центром M и радиусом a и биссектрису угла. Точек может быть две, одна или ни одной. 34. *Указание.* Провести биссектрису противолежащего угла. 36. *Указание.* 1) Построить биссектрису угла A и перпендикуляр из середины BC . 2) Описать окружность с центром C и радиусом CB до пересечения со сторонами угла. Задача может иметь одно, два или три решения. 3) Построить точку, симметричную с вершиной A относительно прямой BC . 37. *Указание.* На второй стороне угла отложить отрезок $AB=l$ и из середины BD восстановить перпендикуляр. 38. 8 м, 20 м, 16 м, 32 м. 39. Нет. 41. 10 м. 42. 1) 2; 2) 7; 3) $n-3$. 43. 1) 4; 2) 6; 3) $n-2$. 44. 1) 5; 2) 35; 3) $\frac{(n-3)n}{2}$. 45. $n = \frac{3m}{m-1}$; 6; 4; невозможный случай. 46. $n=2m+3$; 4; 5; 7; 8.

1. 72° и 108° . 2. $\frac{11}{16}d$. 3. $1\frac{2}{7}d$. 4. Увеличить на $1\frac{1}{16}d$. 5. $\frac{5}{8}d$.
 6. 43° ; 137° и 137° . 7. 135° и 45° . 8. 36° и 144° . 9. 50° или 130° . 10. $\frac{11}{24}d$. 11.
 30° ; 60° ; 90° . 12. $\frac{14}{19}d$. 13. $44^\circ 59' 30''$. 14. $31^\circ 40'$. 15. 30° ; $17^\circ 30'$; 40° ; 45° . 16.
 $37^\circ 29' 46''$. 17. $38^\circ 34'$. 18. $\frac{5}{14}d$. 19. $\frac{8}{9}d$. 20. 15° . 21. 30° . 22. $\frac{4}{7}d$; $\frac{4}{7}d$; $\frac{6}{7}d$. 23.
 $7,3$ м. 24. 1) 18 см; 2) 8 см. 25. Указание. Данный треугольник есть половина
 равностороннего. 26. Указание. Продолжить катет за вершину прямого угла,
 отложить отрезок, равный этому катету, и соединить с вершиной острого
 угла. 28. 1,2 м. 29. $A = \frac{4}{9}d$; $B = \frac{2}{3}d$; $C = \frac{8}{9}d$; 30. 60° . 31. $\frac{5}{9}d$. 32.
 $1\frac{3}{8}d$; $\frac{5}{16}d$; $\frac{5}{16}d$. 34. $\frac{2}{3}d$. 35. Указание. Применить теоремы: 1) об углах при
 основании равнобедренного треугольника и 2) о внутренних накрест лежащих
 углах при параллельных. 36. 90° . 37. 135° . 38. $\frac{2}{3}d$. 39. $\frac{d}{2}$.
 40. $\frac{7}{15}d$; $\frac{7}{15}d$; $1\frac{1}{15}d$. 41. 1) $\frac{4}{5}d$; $\frac{3}{5}d$; $\frac{3}{5}d$; 2) $1\frac{1}{5}d$; $\frac{2}{5}d$; $\frac{2}{5}d$. 42. Указание.
 Продолжить медиану на равное ей расстояние. 44. Указание. Вычислить
 $\angle CAD$ и $\angle CAE = \angle BAD$. 45. $1\frac{5}{9}d$. 46. Указание. Вычислить образовавшиеся
 углы. 47. $\angle D = \frac{1}{2}\angle A$; $\angle E = \frac{1}{2}\angle C$; $\angle DBE = d + \frac{1}{2}\angle B$. 48. $1\frac{1}{12}d$.
 49. $\frac{4}{15}d$; $\frac{4}{15}d$; $1\frac{7}{15}d$. 50. $\frac{11}{17}d$. 51. $\frac{7}{9}d$. 52. 1) $10d$; 2) $16d$; 3) $46d$. 53. 54° ;
 81° ; 108° ; 135° ; 162° . 54. Увеличится на $10d$. 55. 1) 17; 2) 26; 3) невозможно.
 56. В четырехугольнике. 57. 13. 58. $2m+2$. 59. $1\frac{4}{11}d$; $1\frac{10}{11}d$; $\frac{2}{11}d$.

§ 5.

1. $1\frac{4}{7}d$; $\frac{3}{7}d$; $1\frac{4}{7}d$. 2. $\frac{19}{22}d$; $1\frac{3}{22}d$. 3. $BC=DA=6$ см; $CD=9$ см. 4. 0,6 м;
 0,8 м. 5. $BE=9$ см; $EC=6$ см. 6. Четырехугольник с двумя парами равных
 противоположных сторон есть параллелограмм. 7. 3 см, 2 см, 3 см. 8. 1) Нет;
 2) нет; 3) да. 9. Указание. Доказать равенство внутренних накрест лежащих
 углов. 10. Может; два равных равнобедренных треугольника, приложенных
 боковыми сторонами. 12. 4,8 м. 13. $AD=BC=1$ м; $AB=BD=CD=0,9$ м. 16. 10 дм.
 17. $\frac{6}{11}d$; $1\frac{5}{11}d$. 20. $\frac{4}{5}d$. 21. $\frac{5}{9}d$. 22. 1) Такая точка существует лишь в квадра-
 те; 2) да. 23. 10 см и 18 см. 24. 1,2 м. 25. 4 м и 8 м. 26. 45° . 27. 12 см. 28. 25 см и
 10 см или 18,75 см и 7,5 см. 29. 8 м. 36. 120° и 60° . 38. $\frac{14}{17}d$ и $\frac{3}{17}d$. 39. 80° и
 100° . 40. 60° и 120° . 41. 150° . 42. 1) Задача не имеет решения. 45. 4 м.
 47. 1 м. 48. 2 м. 49. 2 м. 50. 2) 2 см. 51. 4 м и 8 м. 53. $2\frac{1}{2}$ м.

54. 4 см, 5 см, 6 см. 55. 6 см. 56. 2,4 м, 3,2 м, 4,8 м. 57. 3 дм. *Указание.* Провести через B прямую параллельно MN и опустить на нее перпендикуляры из A и O . 58. 3 дм. 59. 4 см, 5 см, 1 см. 61. 16 дм. 62. 13 см, 16 см, 19 см, 22 см, 25 см. *Указание.* Сначала доказать (вспомогательным построением), что параллельные отрезки полученного чертежа возрастают равномерно. 63. $\angle A = \frac{4}{7}d$; $\angle B = 1\frac{3}{7}d$; $\angle C = 1\frac{2}{7}d$; $\angle D = \frac{5}{7}d$. 64. $AD = 0,8$ м. 65. Нет. 66. 4 м. 67. Ближе к общему основанию. 68. $12\frac{1}{2}$ см, $11\frac{1}{2}$ см. 69. 3 м, 2 м. 70. 6 дм и 10 дм. 71. 1:2. 73. 6 м. 74. $\frac{9}{13}d$ и $1\frac{4}{13}d$. 75. $\frac{2}{3}d$ и $1\frac{1}{3}d$. 76. 15 дм, 9 дм. 77. 1 м. 78. 24 см и 36 см. 79. 1,5 м, 4 м. 80. 1,7 м. 81. $m-h$; $m+h$. 82. 10 см. 83. $\frac{3}{4}a$. 84. a . *Указание.* Продолжить EF до пересечения с продолжением BC . 86. 1) Построение возможно лишь в том случае, когда разность оснований трапеции меньше суммы двух боковых сторон и больше их разности. *Указание.* Сначала построить треугольник, у которого боковые стороны равны боковым сторонам трапеции, а основание равно разности оснований трапеции. 2) Задача имеет решение лишь при условии, что сумма оснований трапеции меньше суммы диагоналей и больше их разности. *Указание.* Сначала построить треугольник, у которого боковые стороны равны диагоналям трапеции, а основание равно сумме ее оснований. 87. 1) Параллелограмм; 3) ромб; 4) прямоугольник; 5) квадрат; 6) параллелограмм. 88. 5 дм, 4 дм; $56^\circ 25'$ и $123^\circ 35'$. 91. 1) 90° ; 2) 180° ; 3) 180° ; 4) 72° .

§ 6.

1. 4 см. 5. 1) 5 см и 25 см; 2) 7 см и 13 см. 6. $\frac{b \pm a}{2}$. 8. 60° . 9. 120° . 10. 2 см. 11. 2 см и 4 см. 12. R . 13. 1 см. 14. 20 см и 12 см. 15. 2,2 м. 16. $\angle AOD = \angle OAC + \angle ACO$; $\angle OAC = \angle OBA = \angle BOC + \angle ACO = 2\angle ACO$; $\angle AOD = 2\angle ACO + \angle ACO = 3\angle ACO$. 17. 1) Задача неопределенная. Если же дана точка на окружности, то хорд можно провести две. 20. 60° . 21. 1) 10 см; 2) 2 дм. 22. $2R$. 23. 1 дм. 24. 0,5 м. 25. 14,13 см. 26. 9,42 см. 27. 6 см. 28. 8 см. 29. $R-r$. 30. 5 см. 31. Центр сопрягающей полуокружности лежит в середине отрезка, перпендикулярного к обеим параллельным. 32. *Указание.* Во всех случаях центр сопрягающей дуги лежит на биссектрисе угла между данными прямыми. 33. Две прямые, параллельные данной прямой и отстоящие от нее на расстоянии, равном радиусу окружностей. 34. *Указание.* Центры окружностей лежат на перпендикуляре к данной прямой в данной точке (два решения). 35. *Указание.* Центр окружности лежит на перпендикуляре к данной прямой в точке B и на перпендикуляре к отрезку AB , проведенном через середину этого отрезка. 36. *Указание.* Центр окружности лежит на биссектрисе угла. 38. *Указание.* Центр окружности есть точка пересечения биссектрис двух внутренних односторонних углов. Задача имеет два решения. 41. 1) Внешнее касание; 2) внутреннее касание; 3) одна окружность вне другой. 42. 1) Внешнее касание; 2) одна окружность внутри другой; 3) одна окружность вне другой; 4) пересечение. 43. 2 см. 44. 9 см, 7 см. 45. 2 см. 46. 16 см. 47. *Указание.* Опустить из центра

перпендикуляр на секущую. Его основание разделит пополам обе хорды. 48. 6 см. 49. 1) R и 80° ; 2) *Указание*. Разделить окружность на три равные части, в точках деления провести касательные; вершины треугольника, образованного касательными, соединить с центром круга; получим три тупоугольных треугольника, в каждый из которых следует вписать окружность. 50. 9 см. 51. 2 дм. *Указание*. Соединить центры вписанных кругов между собой и с центром данного круга и рассмотреть полученные треугольники. 52. 1 дм. 53. 1) Прямая, соединяющая центр с данной точкой. 54. 1) Две concentрические окружности. 57. *Указание*. Задача имеет в общем случае четыре решения. Найти условие, при котором задача имеет три решения.

§ 7.

1. 1) 5° ; 2) 15° ; 3) $\frac{1}{3}$. 2. 1) 5° ; 2) $4^\circ 26' 40''$; 3) $21^\circ 36''$; 4) $25^\circ 42' 51\frac{3''}{7}$; 5) $163^\circ 38' 10\frac{10''}{11}$. 3. 1) $\frac{1}{24}$; 2) $\frac{1}{16}$; 3) 0,3; 4) $\frac{1}{900}$; 5) $\frac{1}{72000}$; 6) $\frac{5}{96}$; 7) $\frac{241}{43200}$; 8) $\frac{1}{2025}$. 4. 1) 150° ; 2) $47,5^\circ$; 3) 155° . 5. 8 см. 6. 0,7 м. 7. $77^\circ 59' 23''$. 8. $16^\circ 33'$. 9. $105^\circ 14'$. 10. $148^\circ 41' 30''$. 11. $94^\circ 39' 30''$. 12. $84^\circ 22' 30''$. 13. $285^\circ 18'$. 14. $137^\circ 34'$. 15. $123^\circ 45'$ и $56^\circ 15'$. 16. $105^\circ 48' 30''$ или $36^\circ 11' 30''$. 17. $37^\circ 30'$. 18. 95° и 120° . 19. $52^\circ 30'$; $82^\circ 30'$ и 45° . 20. 108° . 22. 40° . 24. 154° . 25. 50° . 26. 40° , 40° и 100° . 27. Стороны треугольника делятся пополам, полуокружность — на 3 равные части по 60° . 28. Помещая треугольник так, чтобы его катеты проходили через концы диаметра, отмечать положение вершины прямого угла. 29. Искомая вершина лежит на окружности, построенной на гипотенузе, как на диаметре, и на прямой, параллельной основанию и отстоящей от него на расстоянии 2 см. 31. Окружность, диаметром которой служит отрезок, соединяющий центр данной окружности с данной точкой. 34. $67^\circ 30'$. 35. $36^\circ 34' 30''$. 36. $48^\circ 50'$. 37. 45° . 38. $110^\circ 52'$. 39. $78^\circ 45'$. 40. 144° . 41. $150^\circ 27'$. 42. $180^\circ - \frac{m^2}{2}$. 43. 80° . 44. 72° . 45. Точка касания. 46. 7° . 47. $20^\circ 30'$. 48. $106^\circ 35'$ и $253^\circ 25'$. 49. $33^\circ 20'$. 50. 100° . 51. 18° . 52. 105° . 53. $31^\circ 12'$. 54. 60° . 55. $34^\circ 54'$. 56. $52^\circ 12'$ и $74^\circ 48'$. 57. $\angle BAC = 100^\circ$; $\angle BCA = 30^\circ$; $\angle DAC = 80^\circ$; $\angle DCA = 60^\circ$. *Указание*. Воспользоваться окружностью, описанной около четырехугольника $ABDC$. 62. *Указание*. Задача сводится к задаче № 60. 63. 2 м. 64. 4 см. 65. 1) 40° ; 2) 36° . 66. 50° и 130° . 67. 105° , 115° и 140° . 68. $55^\circ 19'$ или $34^\circ 41'$. 69. *Указание*. Начать с построения треугольника, образованного основанием и отрезками, соединяющими центр вписанного круга с вершинами основания. 70. 6:5. 71. $p - g$. 73. 60 см. 75. *Указание*. На касательной к данной окружности, как на стороне, построить данные углы и провести касательные, параллельные двум другим сторонам. 76. 1 м. 77. $25^\circ 10'$; $154^\circ 50'$; $25^\circ 10'$ и $154^\circ 50'$. 78. *Указание*. 1) Центр вписанного круга лежит в точке пересечения диагоналей ромба. 79. 2 см. 80. 143° , 37° , 143° и 37° . 81. Вне. 82. 3 см. 83. 25 см. 84. $\angle BCD = 109^\circ 36' 18''$; $\angle B = \angle D = 90^\circ$. 85. 1) Да; 2) нет. 86. $\frac{1}{3} R$. 87. 81° . 88. 1) 3 м, 6 м, 9 м, 6 м; 2) 45° , 90° , 135° , 90° .

§ 8.

1. 1) $AD=8$ м и $DC=12$ м; 2) 10 м; 3) 1,8 м. 2. 10 см. 3. 1) Да; 2) нет; 3) нет; 4) да. 4. $BE=7$ см; $EC=5$ см. 5. 39 см и 65 см. 6. 8 см. 7. 50 см. 8. 16 см, 20 см, 20 см. 9. $BE=10$ м, $EC=14$ см. 10. $\frac{b}{a+c}$. 11. 6 см, 4 см и 6 см. 12. $\frac{ab}{a+b}$.

§ 9.

1. 1 м, 1,2 м. 2. 10 м, 25 м, 20 м. 3. 42,0 м (с точностью до 0,1). 4. 1) $b_1=35$, $c=8$; 2) $c=20$. 5. $AC=24$ см, $EF=18$ см, $DF=15$ см. 6. 13,6 см. 7. $AC=3$ см; $A_1C_1=1,2$ м. 8. $AC=20$ см; $EF=15$ см. 9. 1) Да; 2) да; 3) нет. 10. 1) Нет; 2) да. 11. 2,6 м. 12. 1) 1 м, 2 м и 2,5 м; 2) 6,5 м и 5,5 м. 13. 1,25 м. 14. 1) 14 см; 2) 6 дм. 15. 1) 4 см; 2) 27:28. 16. 2 м. 17. $\frac{bc}{a+c}$. 18. $BC=12$ см; $BD:BA=3:4$. 19. $AD=1$ м, $DC=3$ м. 20. *Указание.* Каждая сторона искомого треугольника есть четвертая пропорциональная к трем отрезкам: периметру искомого треугольника, периметру данного треугольника и одной из сторон данного треугольника. 22. *Указание.* По углу и отношению отрезков основания построить треугольник, подобный искомому. 23. $OB=15$ см, $OD=12$ см. 24. $AO:OC=20:9$, $AD=40$ см, $BC=18$ см. 25. $AB=30$ см, $AD=40$ см. 26. 18 см. 27. 20 см. 28. 300 м. 29. $\frac{a(m-n)}{n}$. 30. $\frac{bc}{a+2c}$. 31. 10 см и 12 см. 32. $\frac{bc}{b+c}$. 33. $\sqrt{pq}$. 34. *Указание.* Найти направление прямых, соединяющих середину хорды с вершинами квадрата. 35. *Указание.* Найти направление прямой, соединяющей одну из вершин треугольника с одной из вершин квадрата. 36. $\frac{ah}{a+h}$. 37. *Указание.* Найти направление прямой, соединяющей одну из вершин прямоугольника. Задача имеет, вообще говоря, 6 решений. 38. 10 см и 18 см. 39. 12 см. 40. $\frac{ah}{a+2h}$. 41. $CD=3$ см, $BD=9$ см. 42. $AD=6$ м, $BE=8$ м. 43. 1 м. 44. 14 см и 10 см. 45. $\sqrt{2ar}$. 46. 10 см и 26 см. 47. $\frac{ab}{a+b}$. 48. 16 см. 49. $\frac{lm}{l+m}$. 50. 68 дм и 80 дм. 51. 20 м. 52. $OE=6$ дм; $OD=8$ дм. 53. 42 дм. 54. $\frac{ar}{a+2r}$. 55. 30 см, 24 см, 36 см. 56. 18 м, 9 м, 12 м, 36 м. 57. 8 дм, 12 дм, 16 дм, 20 дм. 58. 100 м и 40 м. 59. $a:b=\sqrt{2}\approx 1,414$. 60. $\frac{a^2}{b}$.

§ 10.

1. 1) 37 см; 2) 65 см; 3) 41 дм; 4) 109 см; 5) $21\frac{1}{4}$; 6) $1\frac{9}{16}$; 7) 17; 8) $\sqrt{61}\approx 7,81$. 2. 1) 161; 2) 260; 3) 24; 4) 42; 5) $7\frac{1}{5}$; 6) $\sqrt{51}\approx 7,14$.

3.

	a	b	c	a_c	b_c	h
1)	(15)	(20)	25	9	16	12
2)	(24)	(7)	25	$23\frac{1}{25}$	$1\frac{24}{25}$	$6\frac{18}{25}$
3)	(4)	(5)	$\sqrt{41}$	$\frac{16}{41}\sqrt{41}$	$\frac{25}{41}\sqrt{41}$	$\frac{20}{41}\sqrt{41}$
4)	(100)	76	(125)	80	45	60
5)	156	(65)	(169)	144	25	60
6)	(600)	175	(625)	576	49	168
7)	(6)	8	10	(3,6)	6,4	4,8
8)	24	(7)	25	23,04	(1,96)	6,72
9)	21	20	(29)	$\left(15\frac{6}{29}\right)$	$13\frac{23}{29}$	$14\frac{14}{29}$
10)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	(3)	1	(2)	$\sqrt{2}$
11)	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{6}$	$\left(1\frac{1}{2}\right)$	$\left(2\frac{2}{3}\right)$	2
12)	$2\sqrt{10}$	$6\sqrt{10}$	20	(2)	(18)	6
13)	(136)	255	289	64	225	(120)
14)	40	(9)	41	$39\frac{1}{41}$	$1\frac{40}{41}$	$\left(8\frac{32}{41}\right)$

4. Указание. Воспользоваться § 190 из Киселева. 5. Указание. Если разность отрезков $x-y=r$, а среднее пропорциональное $\sqrt{xy}=p$, то сумму отрезков можно найти как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами r и $2p$. 7. 50 см и 72 см. 8. 5,2 м. 9. 18 см, 98 см. 12. Воспользоваться задачей № 11. 13. 3, 4, 5. 14. $\sqrt{116} \approx 10,8$ м. 15. 1) $\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) 109 см. 16. $32\sqrt{2} \approx 45$ мм. 17. 1) $a\sqrt{2}$; 2) $2(\sqrt{2} + 1)$ см. 18. Нет. 19. 1) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) 32 см и 60 см. 20. 1) 41 см; 2) 10 см. 21. 1) 15 см; 2) 125 см, 125 см, 240 см; 3) $2\sqrt{2}$ см. 22. $BD \approx 5,0$ м. 23. 1) 3 м и 4 м; 2) 9 см, $1\frac{5}{7}$ см, $14\frac{2}{7}$ см. 24. 1) $\frac{a}{2}\sqrt{3}$; 2) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}$; 3) $2m(2 + \sqrt{3})$; 4) $2\sqrt{3}$ и $4\sqrt{3}$ см. 25. 1) 25 см или 11 см; 2) 29 см; 3) 40 см. 26. 1) 37 см; 2) 3 дм и 4 дм. 27. 1) 24 см; 2) 36 см и 54 см. 28. Около 5630 м. 29. 1) $d \approx 25$ мм; 2) $d \approx 19$ мм; 3) $h \approx 11$ мм; $D \approx d + \frac{2}{3}h\sqrt{3}$. 31. 2) $\sqrt{a^2 + 3b^2}$. 32. 24 мм. 33. 1) 39 дм; 2) 80 см; 3) 14 см или 4 см; 4) 21 см; 5) 6 см. 34. 1) $D \approx 425$ мм; 2) $D = \frac{l^2 + 4s^2}{4s}$. 35. $\frac{a^2 + 4h^2}{8h}$. 36. 9 см или 39 см. 37. 42,5 см. 38.

- 1) 77 см; 2) 61 см; 3) 13,44 см. 39. $y = \sqrt{2Rr}$. 40. 1) 40 см; 2) внешняя касательная равна 48 см; внутренняя касательная равна 30 см. 41. 13 м. 42. 73 см. 43. 7 м и 25 м. 44. $7\frac{9}{17}$ см. 45. 175 см и 600 см. 46. 20 см. 47. 1:4. 48. 49:81. 49. 21 см и 28 см. 50. $a(\sqrt{2} - 1)$ и $a(2 - \sqrt{2})$. 51. $n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$ и $m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$. 52. 1 м. 53. 15 см. 54. 5 м. 55. 1) 10 см; 2) 7,5 см. 56. 18 дм. 57. 1) 24 дм; 2) $2,4\sqrt{5}$ дм; $1,8\sqrt{5}$ дм; 3) 13,44 дм. 58. 1) $9\frac{1}{15}$ см; 2) $0,8r\sqrt{5}$. 59. 15 дм. 60. 65 дм. 61. 35 дм. *Указание.* Провести среднюю линию и высоту из вершины тупого угла. 62. $AE:EC=16:25$. 63. 36 дм, 48 дм. 64. 18 дм и 80 дм. 65. 1) 37 м и $\sqrt{769} \approx 27,7$ м; 2) 4:5. 66. 1) 3,125 дм; 2) 16,9 м. 67. 6 дм. *Указание.* Отрезки гипотенузы, образуемые точкой касания, равны прилежащим к ним отрезкам катетов. 68. 38 дм и 22 дм. 69. 25 дм. *Указание.* Ввести вспомогательное неизвестное — расстояние от центра до одной из хорд. 70. 30 см. 71. 32 см и 18 см. 72. Основания: $\frac{2mr}{\sqrt{mn}}$ и $\frac{2nr}{\sqrt{mn}}$; боковая сторона $\frac{(m+n)r}{\sqrt{mn}}$. 73. 20 дм. 74. 1 дм. 75. $CA = \frac{m^2 + n^2}{m} = 39$; $CB = \frac{m^2 + n^2}{n} = 26$. *Указание.* Соединить концы отрезков m и n с основанием перпендикуляра. 76. 27 дм и 64 дм. 77. *Указание.* Выразить длину общей внешней касательной через радиусы. 78. $AB = \sqrt{a(a+b)}$; $CD = \sqrt{b(a+b)}$. 79. $AC \approx 44$ м. 80. ≈ 20 м. 81. 1) 7; 2) $\sqrt{7}$; 3) 16; 4) $2\sqrt{3}$. 82. 1) Тупоугольный; 2) прямоугольный; 3) остроугольный; 4) остроугольный; 5) тупоугольный. 83. 1) $p=5$, $q=9$, $h=12$; 2) $p=35$, $q=5$, $h=12$; 3) $p=20$, $q=8$, $h=15$; 4) $p=1\frac{3}{8}$, $q=2\frac{5}{8}$, $h=\frac{3}{8}\sqrt{15}$. 84. 1) 7 см; 2) 13 см; 3) 73 см. 85. 1) 7 см; 2) 13 см; 3) 31 см. 86. 1) $\sqrt{13-6\sqrt{2}} \approx 2,125$; 2) $\sqrt{13} \approx 3,6$; 3) 5. 87. 13; 14; 15. 88. 9 см и 24 см. 89. 10 м или 6 м. 90. Боковые стороны 7 см и 15 см, высота $\frac{105\sqrt{3}}{26} \approx 7,0$ см. 91. 20 см. 92. $AC=a$, $AD=a(\sqrt{2}+1) \approx 2,4a$; $CD=a\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx 1,8a$. 93. $x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}} = 30$. 94. 1) 13 см; 2) 11,2 см. 95. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{4}$. 96. 13. 97. 12 см и 8 см. 98. 14 см и 16,8 см. 99. 25; 56. 100. 52. *Указание.* Привести высоту треугольника ABC и воспользоваться подобием треугольников. 101. $\sqrt{R^2 + 3r^2}$. 102. 1) 20 см и 30 см; 2) 10 см и 15 см. 103. 1) 7 см и 11 см; 2) стороны 4 см и 7 см; диагонали 7 см и 9 см. 104. 1) 11; 2) 14; 3) $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$; $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}$; $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$. 105. 24 см. 106. 1) 7 см; 2) 6 см. 107. 1) 12; 20;

$\sqrt{544} = 23$; 2) 15; 17; 39; 3) 2,4; $\sqrt{23,4}$; $\sqrt{13,6}$. 108. 15 см и 25 см.
 111. Указание. Середины сторон четырехугольника соединить еще последовательно. 112. 30° .

§ 11.

1. $AB \approx 13$ м. 2. $\sqrt{3} \approx 1,7$ м. 3. 1) 6 см, 12 см, 1 м; 2) 16 см. 4. 1) Внутри круга; 2) на окружности; 3) вне круга. 5. 1) 4; 2) 65; 3) $\frac{r}{5}$; 4) 5 или 45. 6. 1) 30 см; 2) 40 см; 3) 21 дм и 29 дм. 10. 1) 1 м; 2) 6 см; 3) 10 м. 11. 1) 8 см; 2) 18 м; 3) 14 см. 12. 1) 7 см; 2) $r(\sqrt{5}-1) = 1,24r$. 13. 12 см. 14. $R = 4,35$ м. 15. Нет. 16. 43,6 см. 17. $R \approx 591$ м. 18. Уменьшился в $2\frac{1}{2}$ раза. 19. 1) 24 см; 2) 33 см. 20. 24 см и 8 см. 21. Увеличилась в 3 раза. 22. 1) 4 см; 2) 20 м; 3) $AB = 35$ м и $AC = 15$ м. 23. 8 см. 24. 1) 9 дм; 2) 36 см; 3) 25. 25. mx и px , где $x = \frac{am - bn}{n^2 - m^2}$. 26. 1) 6; 2) 3; 3) $\sqrt{3}$. 27. 21 см. 28. В $2\frac{1}{2}$ раза. 30. Вторая точка пересечения. 31. 1) 3 см; 2) 18 см; 3) $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$. 32. 1) 226 км; 2) 270 км. 33. 1) 17 см; 2) 13 см. 34. 1) 10 см; 2) $\frac{a}{2}$. 35. 18 см. 36. 12 см и 36 см. 37. 1) 18 см и 12 см; 2) 9 см и 6 см или $12\frac{1}{2}$ см и $2\frac{1}{2}$ см. 40. 6 дм. 41. $\frac{2}{5}r$. 42. 1) 10 см; 2) 8 дм; 3) 9,375 м. 43. 25 дм, 8 дм, 15 дм. 44. $\frac{a}{r}\sqrt{4r^2 - a^2}$. 45. 9 дм. 46. $\sqrt{2ar}$.

§ 12.

1. 1) 15° , 22° , 5; 2) 12-угольник, 30-угольник. 3. 60° , 90° , 108° , 120° , 135° , 144° , 150° , $165^\circ 36'$. 4. 1) 8-угольник, 12-угольник; 2) 10-угольник, 15-угольник. 5. $2\sqrt{2} \approx 2,8$ см. 6. $\sqrt{3} \approx 1,7$ см. 7. 4,4 см. 10. 2) $2m\sqrt{3}$. 11. 1) $r = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$; 2) $R = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$; 3) $a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. 12. 2 см, 4 см, $2\sqrt{3}$ см, 0. 15. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 3) a ; 4) $\frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$; 5) $a\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 16. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 17. 1) $2k$; 2) $k\sqrt{2}$; 3) $\frac{2k\sqrt{3}}{3}$; 4) $k\sqrt{4-2\sqrt{2}}$. 18. 1) $2R\sqrt{3}$; 2) $2R$; 3) $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. 19. $b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$. 21. 1) $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $2R$; 2) $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a(\sqrt{2}+1)$, $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. 22. 1) R , $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{3}$; $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $2R$;

- 2) $a\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $a\sqrt{4+2\sqrt{3}}=a(\sqrt{3}+1)$, $a\sqrt{3(2+\sqrt{3})}$, $a(2+\sqrt{3})$, $2a\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 23. *Указание.* Сторона искомого пятиугольника равна большей части диагонали, разделенной в среднем и крайнем отношении. 24. $BD=4,2$ м, $a_3=2,3$ м, $H=2,1$ м. 25. $a_n:b_n=r:R$, $a_8:b_8=\frac{1}{2}$, $a_6:b_6\approx 0,866$. 26. 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2}\approx 0,866R$; 2) $\frac{R\sqrt{2}}{2}\approx 0,707R$. 27. 1) $\frac{a}{2}(2+\sqrt{2})$; 2) $\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$. 29. $\frac{a}{3}$. 31. $\frac{b\sqrt{3}}{3}$, $\frac{b\sqrt{6}}{3}$. 32. $2\sqrt{6}\approx 4,9$ дм. 33. 1) $\frac{R\sqrt{2}}{2}\approx 0,7R$; 2) $\frac{a\sqrt{6}}{3}\approx 0,82a$. 34. 1) $\frac{a}{6}(3\pm\sqrt{3})$; 2) a . 36. $\frac{a}{6}$. 37. *Указание.* Через центр данного квадрата провести диагонали искомого квадрата, каждая из которых найдется как гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника с катетами, равными данной стороне. 38. *Указание.* Диагонали квадрата делят углы между диагоналями ромба пополам. 39. $8a(2-\sqrt{2})$. 41. 1) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$; 2) $R(\sqrt{2}-1)$. 42. 1) $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$; 2) $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 43. 1: $\sqrt{3}$: $2\approx 1:1,7:2$. 44. $c(\sqrt{3}+1)$. 45. $\frac{3}{5}h$. 46. В случае внешнего касания: 1) $R(2\sqrt{3}+3)$; 2) $R(\sqrt{2}+1)$; 3) R . В случае внутреннего касания: 1) $R(2\sqrt{3}-3)$; 2) $R(\sqrt{2}-1)$; 3) $\frac{R}{3}$.

§ 13.

1. $2,25$ м². 2. 23 т. 3. $\sqrt{32500}\approx 180$ м. 4. 1) $\frac{l^2}{2}$; 2) $2R^2$; 3) в два раза. 5. 1) Увеличится в 9 раз; уменьшится в 2,25 раза; 2) увеличить в два раза; уменьшить в 5 раз. 6. 552,25 га. 7. 48 кг/дм². 8. 21,9 а. 9. 17 км. 10. 1) 8 м, 18 м; 2) 12 дм и 25 дм. 11. 24 м. 12. 8,16 см². 13. 130 см². 14. 818 см. 15. 7,54 а. 16. 30 см. 17. $\frac{ph_1h_2}{h_1+h_2}$. 18. 1) $\frac{ab}{2}$; 2) $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$. 19. 30°. 21. 202,8 см². 22. 1400 см². 25. *мл*. 26. 1:3. 27. *мл*. 28. 7 см и 9 см или 21 см и 3 см. 29. ≈ 120 кг. 30. 1) 288 см²; 2) 1 м²; 3) 5 кв. единиц. 31. *Указание.* Высоты данного и искомого треугольников равны. 33. 1) $\frac{ab}{4}$; 2) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$. 34. 1) Да; 2) нет; 3) да. 35. 1) 39 дм²; 2) 82 см; 3) $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 36. $\frac{c^2}{4}$. 37. 1) 2688 см²; 2) $\frac{b}{4}\sqrt{4c^2-b^2}$; 3) $10\sqrt{21}\approx 46$ см². 38. *Указание.* Соединяем данную точку K с точкой D — серединой стороны AC , проводим $BE\parallel DK$. Прямая KE будет искомая. 39. 1) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{3Q\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1}{3}h^2\sqrt{3}$.

40. 1) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $3r^2\sqrt{3}$. 41. 6 дм². 42. 2250 см² или 522 см². 43. 55 см,
48 см. 44. 12 см или 16 см. 45. 1) 1440 см²; 2) 9,6 м. 46. $\sqrt{Q \frac{m^2 + n^2}{2mn}}$. 51.
12,8 м². 52. $\frac{a^2}{4}(\sqrt{3} - 1) = 0,183a^2$. 53. 75 см². 54. $a^2(3 + \sqrt{3}) = 4,73a^2$. 55.
 $2a^2(\sqrt{2} - 1) = 0,8a^2$. 56. 8,4 м². 57. 6912 см². 58. 52 см². 59. 1) 84; 2) 60;
3) $10\sqrt{2} = 14,1$; 4) $\frac{15}{4}\sqrt{3} = 6,49$; 5) 5,28; 6) $17\frac{1}{3}$; 7) 8; 8) $18\frac{1}{2}$; 9) $3\frac{1}{2}$.
60. 1) 2 м; 2) 112. 61. 1) 130 дм, 125 дм, 15 дм; 2) 18 см, 20 см, 34 см.
62. 144 см². 63. 30 см. 64. 1224 см². 65. 270 см². 66. 1) 25 или 39; 2) 14 или
12. 67. 36 кв. единиц. 68. 6 см. 69. 14 м, 30 м, 40 м. 70. 546 см²;
 $\sqrt{1621} = 40$ см. *Указание.* Для определения BD проводим $BE \perp AC$, $DF \perp AC$ и
 $DG \parallel AC$ до пересечения с продолжением BE . 71. 1) 8 см; 2) 25 см; 3) 8 см и
10 см. 72. $\approx 1,9$ м². 73. 13,25 м². 74. 1100 м². 75. 11583 см² $\approx 1,2$ м².
76. 1) 10 см; 2) 2:3. 77. 24 дм². 78. 288 см². 79. $\frac{mn}{6}$. 80. 480 см². 81. 540 м².
82. 1) 256 см²; 2) h^2 . 83. $\frac{c^2}{2}$. 84. 216 см². 85. 8316 см². *Указание.* Пусть
 $ABCD$ — данная трапеция, причем $BC \parallel AD$. Проводим $CE \parallel BD$, где E — точка
на продолжении AD , и трапецию заменяем треугольником ACE . 86. $\frac{R^2}{2}$. 87.
 $\frac{a^2}{2}$. 88. 1) 1764 см²; 2) 150 м². 89. 48 см. 90. $\frac{1}{2}[d_1h_1 + d_2(h_2 + h_3)] = 12,0$ га.
91. $\approx 34a$. 92. 1) $\frac{1}{2}kl$; 2) $\frac{1}{4}kl$. 93. $\frac{1}{2}(a + b\sqrt{3}) \cdot (b + a\sqrt{3})$. 94. $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + ab + b^2)$.
95. 426 см². *Указание.* Провести $BE \perp AD$ и $CF \perp AD$. 96. $\frac{3r^2}{4}(\sqrt{3} + 1)$. 97. 1)
8 см; 2) 16 дм. 98. $3r^2\sqrt{3}$. 99. $84\sqrt{6}$. 100. 650. 101. 28,5 м². 102. 1) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$;
2) $2r^2\sqrt{3}$; 3) $\frac{1}{3}\sqrt{2S\sqrt{3}}$. 103. 1) $2R^2\sqrt{2}$; 2) $3R^2$. 104. ≈ 355 см². 105. $\approx 10,7$ см².
106. 1) $\frac{Q\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{Q\sqrt{2}}{2}$. 107. 1) $R^2\sqrt{3}$; 2) $4R^2(2 - \sqrt{2})$. 114. 3:2.
116. $2(a^2 + ab + b^2)$. 117. $P:Q = 2:3$. 118. пл. ABC : пл. $DBE = 1:2$. 120. 16; 25. 121.
 $5\sqrt{2} = 7,07$ дм. 122. $\frac{1}{4}$. 123. $h\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7h$. 124. 1) 4:21:56; 2) $m^2:(2m+n)n$. 125.
256 см². 126. 3:5:7. 127. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{4}$. 128. 32 дм², 72 дм², 128 дм². 134.
 $\sqrt{2}$. 135. $10\sqrt{2} = 14,14$ м. 136. 300 дм². 138. 25 дм². 139. 60 см² и 40 см².
140. 1:3. 141. $\sqrt{3} + 1 \approx 2,732$; $2(2 + \sqrt{3}) \approx 7,464$. 143. $\frac{2mn}{(m+n)^2}$.

§ 14.

2. 1) 12 дм; 2) $m_a = \sqrt{11,5} \approx 3,4$; $m_b = \sqrt{7,75} \approx 2,8$; $m_c = \sqrt{2,5} \approx 1,6$.
 3. 30. 4. 15 дм и 25 дм. 5. 144. 6. 16,5. 7. 1) Указание. Сначала построить тр-к AMB со сторонами c , $\frac{2}{3}m_a$ и $\frac{2}{3}m_b$; 2) 72. 8. 1) Указание. Построить тр-к AMK со сторонами $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$ и $\frac{2}{3}m_c$, а затем найти основание AC искомого тр-ка ABC ; 2) 72. 10. 6; 10; 24. 11. 4. 12. 12 и 27. 13. 29 см и 12 см. 14. 1) Вне треугольника; 2) внутри треугольника; 3) на середине гипотенузы. 17. 1) $R=8\frac{1}{8}$, $r=4$; 2) $R=8\frac{1}{8}$, $r=1,5$; 3) $R=24\frac{1}{6}$, $r=2\frac{1}{3}$; 4) $R=\frac{35}{\sqrt{96}} \approx 3,6$, $r=\frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,2$. 18. 4,5. 19. 1) R ; 2) $R\sqrt{2}$. 20. Указание. Выразить все высоты через площадь и стороны. 21. $\frac{R^2}{4}(3+\sqrt{3})$. 22. 40 см и 42 см. 23. 1) R^2 ; 2) $R^2\sqrt{2}$; 3) $R^2\sqrt{3}$; 4) $2R^2$.

§ 15.

1. 1) $\approx 62,8$ м; 2) $\approx 94,2$ м; 3) ≈ 220 см. 2. 1) ≈ 16 см; 2) $\approx 4,0$ см; 3) $\approx 0,76$ дм. 3. 60. 4. $\approx 5,9$ м/с. 5. 1) $\frac{\pi R}{4}$; 2) $\frac{49\pi R}{360}$; 3) $\frac{419\pi R}{14400}$. 6. 1) $\frac{4l}{3\pi}$; 2) $\frac{135l}{8\pi}$. 7. $133^\circ 20'$. 8. $\approx 21^\circ,5$. 9. 1) 144° ; 2) $1\frac{1}{3}$ см; 3) 7,2 см. 10. $x=\frac{180^\circ l}{\pi R}$; 1) $\frac{810^\circ}{\pi}$; 2) $\frac{72^\circ}{\pi}$. 11. $\approx 57^\circ 18'$. 12. 1) $\frac{\pi a}{3} \approx 1,05a$; 2) $\frac{\pi a\sqrt{2}}{4} \approx 1,11a$; 3) $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{9} \approx 1,21a$. 13. 1) $\frac{3l}{\pi} \approx 0,95l$; 2) $\frac{2l\sqrt{2}}{\pi} \approx 0,90l$; 3) $\frac{3l\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,83l$. 14. 25 см. 15. 1) $2\pi r$; 2) зазор и для земного шара и для мяча один и тот же и равен $\frac{1}{2\pi} \approx 0,16$ м. 16. 1) ≈ 182 мм; 2) $\approx 8,0$ см. 17. $50\pi \approx 157$ см. 18. $\frac{3}{4}l$. 20. ≈ 119 см. 21. 2. 22. $\approx 0,15\%$. 23. $\approx 0,00005D$. 24. 1) ≈ 314 м²; 2) $\approx 50,2$ дм²; 3) $\approx 21,2$ см². 25. 1) $\approx 0,8$ см; 2) ≈ 4 м; 3) $\approx 2,3$ дм. 26. $\approx 64a$. 27. $\approx 78,5$ см². 28. ≈ 4 см. 29. $\approx 0,2826$ м². 30. $\approx 2,6$ т. 31. 1) $\approx 5,1$ см²; 2) ≈ 15 см. 32. 2) 10 см. 33. $\frac{\pi F}{2}$. 34. $\approx 15,7$ м². 35. 1) 1:4; 2) 1:2; 3) 3:4. 36. $\approx 0,2$ кг/см². 37. $\frac{\pi a^2}{4}$. 39. 1) $\frac{3}{16}\pi r^2$; 2) $\frac{7}{160}\pi r^2$.

40. 1) $\sqrt{\frac{5q}{\pi}}$; 2) $\sqrt{\frac{600q}{\pi}}$. 41. $360^\circ \cdot \frac{q}{\pi r^2}$. 42. 1) $\frac{R^2}{4}(\pi - 2) = 0,275R^2$;
 2) $\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) = 0,09R^2$; 3) $\frac{R^2}{8}(\pi - 2\sqrt{2}) = 0,04R^2$; 4) $\frac{R^2}{12}(\pi - 3) = 0,01R^2$.
 43. 1) $\frac{a^2}{36}(4\pi - 3\sqrt{3}) = 0,20a^2$; 2) $\frac{a^2}{8}(\pi - 2) = 0,14a^2$; 3) $\frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) =$
 $\approx 0,09a^2$. 44. $\approx 3,7 \text{ м}^2$. 45. 1) $\frac{1}{6}\pi r^2 \approx 0,5r^2$; 2) $\frac{Q\pi}{360}$. 46. $\frac{\pi R^2}{6}$.
 47. $\frac{a^2}{24}(7\pi - 6 - 6\sqrt{3}) = 0,23a^2$ или $\frac{a^2}{24}(13\pi + 6 - 6\sqrt{3}) = 1,52a^2$.
 48. $\frac{4Qmn}{\pi(m^2 + n^2)}$. 49. $\frac{R}{2}(\sqrt{4+\pi} + \sqrt{4-\pi}) = 1,8R$ и $\frac{R}{2}(\sqrt{4+\pi} - \sqrt{4-\pi}) = 0,87R$.
 50. $\frac{8Q}{\pi} \approx 2,55Q$. 51. $\frac{\pi Q\sqrt{3}}{3} = 1,82Q$. 52. 1:2. 53. 1) $\frac{R^2}{4}(4 - \pi) = 0,215R^2$;
 2) $\frac{R^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi) = 0,68R^2$; 3) $\frac{R^2}{6}(2\sqrt{3} - \pi) = 0,05R^2$. 54. $\frac{a^2}{14}(\pi + 6) \approx 0,38a^2$.
 55. 1) В 9 раз, в 25 раз; 2) в 2 раза, в $\sqrt{5} \approx 2,236$ раза. 56. Нет, надо 4
 такие малые трубы. 57. a^2 . 58. 1) $\approx 0,215r^2$; 2) $ab - 0,215b^2$; 3) $\approx 0,393R^2$;
 4) $\approx 0,858r^2$. 59. $\frac{R^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}) = 1,23R^2$. 60. $\frac{a^2}{2}(\pi - 2) \approx 0,57a^2$.
 61. $\frac{\pi}{8}(a^2 + b^2) - \frac{ab}{2}$. 63. $\frac{a^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3}) = 0,18a^2$. 64. $\frac{a^2}{6}(2\pi + 3\sqrt{3}) \approx 1,9a^2$.
 67. $\approx 988 \text{ см}^2$. 68. $\approx 25 \text{ см}^2$. 69. $(1,57R + 2a)t - 1,215t^2$. 70. $625\pi \text{ м}^2$. 71. 1) $\frac{R}{3}$;
 2) $R(\sqrt{2} - 1) \approx 0,4R$; 3) $R(2\sqrt{3} - 3) \approx 0,46R$.

§ 16.

1. 2) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{10}$. 3. № 1, 2,
 3, 9, 10, 11, 12, 13 — первого измерения; 4, 7, 14, 16, 18 — второго
 измерения; 5, 6, 15, 17 — третьего измерения; 8 — нулевого измерения.
 4. № 2, 4, 5, 6. Указание. 8) Построить сначала $y = \frac{pq}{s}$, а затем уже
 $x = \frac{yr}{t}$. 7. Указания. 2) $x = \sqrt{yb}$, где $y = \frac{a^2}{c}$; 5) $x = \sqrt{b^2 + y^2}$, где $y = c\sqrt{3}$;
 6) $x = \sqrt{a^2 \cdot \frac{a+c}{b+d}} = \sqrt{yz}$, где $y = \frac{a^2}{b+d}$, $z = a+c$. 8. Сторона квадрата
 $x = \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}$. 9. Радиус искомого круга $x = R\sqrt{2}$. 10. Радиус

концентрической окружности $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. 11. Сторона квадрата $x = \sqrt{\frac{3}{5}} ah$. 12. Искомый радиус $x = \sqrt{R^2 - r^2}$. 13. Высота искомого треугольника равна $\frac{hb}{a}$. 15. 1) Преобразовать уравнение к виду: $x(p-x)=q^2$ и составить из него пропорцию; 3) мнимые корни. 16. Большая часть $x = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$; меньшая часть $a-x = \frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$. 17. $a_{10} = R \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 18. Большая часть равна $a \cdot \frac{2,236-1}{2} = 0,618a$, а это отличается от $\frac{5}{8}a$ приблизительно на $0,007a$. 19. 1) $\frac{b}{2}(\sqrt{5}+1)$. 20. $2r\sqrt{5}-2 = 0,98r$. 23. Искомое расстояние точки от центра $x=r\sqrt{5}$. 24. Одна из вершин квадрата, находящихся на диаметре, удалена от центра на расстояние $x = \frac{r\sqrt{5}}{5}$. 25. Сторона прямоугольника, перпендикулярная к основанию треугольника, $x = \frac{h(p-a)}{h-a}$. 26. Расстояние искомой параллели от вершины треугольника $x = \frac{h\sqrt{2}}{2}$. 27. Расстояние искомого перпендикуляра от вершины меньшего угла при основании треугольника $x = \sqrt{\frac{bm}{2}}$, где b — основание треугольника, m — проекция большей боковой стороны на основание. 28. Стороны прямоугольника $x = \frac{d_1(3 \pm \sqrt{3})}{6}$ и $y = \frac{d_2(3 \mp \sqrt{3})}{6}$, где d_1 и d_2 — диагонали ромба. 29. Расстояние вершины треугольника от вершины квадрата $x = a(2 - \sqrt{3})$, где a — сторона квадрата. 30. Расстояние между вершинами данного и искомого квадратов $x = \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$. 31. Радиус искомой окружности $x = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{\pm 2(a \pm r)}$, где a — длина перпендикуляра, проведенного из центра данной окружности на данную прямую, b — расстояние данного перпендикуляра от данной точки. 32. Стороны искомого прямоугольника равны $\frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4cd}}{2}$, где a и b — стороны первого прямоугольника, c и d — стороны второго прямоугольника. 33. Сторона прямоугольника, параллельная высоте треугольника,

$$y = \frac{bhn}{bn + mh} = \frac{bh}{b + \frac{m}{n}h}, \text{ где } b \text{ — основание, } h \text{ — высота треугольника. 34.}$$

$$BE = \frac{a^2}{b}. \text{ 35. } BE = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}. \text{ 36. Искомый радиус } r = \frac{a + b - \sqrt{2ab}}{2}, \text{ где } a$$

$$\text{и } b \text{ — стороны прямоугольника. 37. } x = \frac{1}{2} \left[\sqrt{m^2 + 4b(a+b)} - m \right]. \text{ Указа-}$$

ние. Продолжить отрезок $AB=a$ до пересечения с данной прямой в точке C и обозначить расстояние от точки C до ближайшей из данных точек буквой b . Воспользоваться свойством секущих, проведенных из одной точки.

**ТАБЛИЦА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
УГЛОВ ОТ 0 ДО 90° ЧЕРЕЗ КАЖДЫЙ ГРАДУС**

Гра- дусы	Синусы	Косинусы	Тангенсы	Котангенсы	Гра- дусы
0	0,00000	1,00000	0,00000	∞	90
1	0,01745	0,99985	0,01746	57,28998	89
2	0,03490	0,99939	0,03492	28,63625	88
3	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	87
4	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	86
5	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	85
6	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	84
7	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	83
8	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82
9	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81
10	0,17365	0,98481	0,17633	5,67123	80
11	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79
12	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78
13	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77
14	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76
15	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75
16	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74
17	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	73
18	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72
19	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	71
20	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70
21	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69
22	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	68
23	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67
24	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66
25	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65
26	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64
27	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63
28	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62
29	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	61
30	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60
31	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	59
32	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58
33	0,54464	0,83867	0,64941	1,53987	57
34	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56
35	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55
36	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54
37	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53
38	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	52
39	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51
40	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50
41	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49
42	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	48
43	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	47
44	0,69466	0,71134	0,96569	1,03553	46
45	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45
	Косинусы	Синусы	Котангенсы	Тангенсы	

**Некоторые числа, часто употребляемые
при решении задач**

$$\pi \approx 3,1416 \text{ (около } 3\frac{1}{7} \text{)}; \quad \frac{\pi}{180} \approx 0,01745; \quad \sqrt{2} \approx 1,4142;$$

$$\sqrt{5} \approx 2,2361; \quad \frac{1}{\pi} \approx 0,3183; \quad \frac{180^\circ}{\pi} \text{ (радиан)} \approx 57^\circ 17' 44'', 8;$$

$$\sqrt{3} \approx 1,7321; \quad \sqrt{6} \approx 2,4495.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

А. П. Киселев. ГЕОМЕТРИЯ

Введение	4
Плоскость	—
Прямая линия	5
Понятие об окружности	7

Глава I

Прямая линия

I. Углы	10
Предварительные понятия	—
Измерение углов	13
Смежные и вертикальные углы	16
Упражнения	19
II. Математические предложения	20
III. Треугольники	23
Понятие о многоугольнике и треугольнике	—
Симметрия геометрических фигур относительно оси	27
Некоторые свойства равнобедренного треугольника	29
Признаки равенства треугольников	30
Внешний угол треугольника и его свойство	33
Соотношения между сторонами и углами треугольника	34
Сравнительная длина прямолинейного отрезка и ломаной линии	36
Сравнительная длина перпендикуляра и наклонных	39
Признаки равенства прямоугольных треугольников	40
Свойство перпендикуляра, проведенного к отрезку прямой через его середину, и свойство биссектрисы угла	42
IV. Основные задачи на построение	44
Упражнения	49
V. Параллельные прямые	52
Основные теоремы	—
Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами	58
Сумма углов треугольника и многоугольника	60
Центральная симметрия	62
VI. Параллелограммы и трапеции	65
Параллелограммы	—
Некоторые частные виды параллелограммов: прямоугольник, ромб, квадрат	68
Некоторые теоремы, основанные на свойствах параллелограмма	70
Трапеции	71
Задачи на построение	72
Упражнения	74

Глава II

Окружность

I. Форма и положение окружности	79
II. Зависимость между дугами, хордами и расстояниями хорд от центра	82
III. Взаимное расположение прямой и окружности	84
IV. Взаимное расположение двух окружностей	87
V. Вписанные и некоторые другие углы. Построение касательной	90
Задачи на построение	97
Упражнения	99
VI. Вписанные и описанные многоугольники	104
VII. Четыре замечательные точки в треугольнике	107
Упражнения	109

Глава III

Подобные фигуры

I. Понятие об измерении величин	114
II. Подобие треугольников	125
Три признака подобия треугольников	128
Признаки подобия прямоугольных треугольников	130
III. Подобие многоугольников	133
IV. Подобие фигур произвольного вида	140
Задачи на построение	144
V. Некоторые теоремы о пропорциональных отрезках	147
Свойство биссектрисы угла треугольника	149
VI. Метрические соотношения между элементами треугольника и некоторых других фигур	151
VII. Пропорциональные линии в круге	158
VIII. Тригонометрические функции острого угла	159
IX. Понятие о приложении алгебры к геометрии	166
Упражнения	170

Глава IV

Правильные многоугольники и вычисление длины окружности

I. Правильные многоугольники	176
Упражнения	186
II. Вычисление длины окружности и ее частей	187
Предел числовой последовательности	—
Длина окружности	192
Упражнения	200

Глава V

Измерение площадей

I. Площади многоугольников	201
Теорема Пифагора и основанные на ней задачи	212

Отношение площадей подобных фигур	214
II. Площадь круга и его частей	218
Упражнения	222

Н. Рыбкин. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Прямая линия (1—18)	228
§ 2. Углы (1—37)	230
§ 3. Треугольники и многоугольники. Перпендикуляр и наклонные. Осевая симметрия (1—50)	233
§ 4. Параллельные прямые. Сумма углов треугольника и многоугольника (1—59)	239
§ 5. Параллелограммы и трапеции (1—93)	245
§ 6. Окружность (1—58)	255
§ 7. Измерение углов дугами (1—88)	261
§ 8. Свойство биссектрисы в треугольнике (1—12)	269
§ 9. Подобие треугольников и многоугольников (1—60)	270
§ 10. Числовая зависимость между линейными элементами треугольников и некоторых четырехугольников (1—112)	277
§ 11. Пропорциональные отрезки в круге (1—46)	290
§ 12. Правильные многоугольники (1—47)	296
§ 13. Площади прямолинейных фигур (1—143)	301
§ 14. Определение в треугольнике: медиан, биссектрис и радиусов описанного и вписанного кругов (1—23)	316
§ 15. Длина окружности и дуги. Площадь круга и его частей (1—71)	318
§ 16. Приложение алгебры к геометрии. Деление в среднем и крайнем отношении (1—37)	326
Ответы	331
Таблица тригонометрических функций углов от 0 до 90°	345

Учебное издание

**Киселев Андрей Петрович
Рыбкин Николай Александрович**

ГЕОМЕТРИЯ

П л а н и м е т р и я

7—9 классы

Учебник и задачник

**Ответственный редактор М. Г. Циновская
Художественный редактор О. И. Белозерский
Оригинал-макет подготовлен А. Е. Косых
Корректор Г. И. Мосякина**

ЛР № 061622 от 23 сентября 1992 г.

Подписано к печати с готовых диапозитивов 22.03.95.
Формат $60 \times 90^{1/16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 22,0. Уч.-изд. л. 25,3.
Тираж 40 000 экз. Заказ № 4836.

**Издательский дом «Дрофа».
105318, Москва, ул. Щербаковская, 3**

**Отпечатано на Смоленском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати. 214020, Смоленск,
ул. Смольянинова, 1.**

**Качество воспроизведения печати соответствует качеству представленных
диапозитивов.**

Издательский дом «Дрофа» выпускает
учебники и пособия известных авторов
по всем курсам школьной программы.
Оптовые поставки во все регионы России.

Телефоны: (095) 369-99-19, 369-06-53

Факс: (095) 369-06-53

105318, Москва, Щербаковская ул., 3

*Несколько издательств,
литературных агентств, типографий
и книготорговых фирм входят в состав
Издательского дома «Дрофа» или постоянно
сотрудничают с ним.*

*В том числе и зарубежные партнеры.
За последние два с небольшим года
увидели свет сотни книг общим тиражом
свыше 15 миллионов экземпляров.*

*Издательская политика «Дрофы» ориентирована
на читателей самых разных возрастов и интересов.
Художественная, энциклопедическая и прикладная
литература для детей и взрослых —
это ежемесячно десятки новых книг,
составляющих несколько серий.*

*Сегодня в планах «Дрофы» значительное место
занимают учебники, учебная и методическая
литература для всех типов общеобразовательных
учреждений, справочные и познавательные книги
для школы и домашнего образования.*

*Издательство приглашает к диалогу всех,
кто заинтересован во взаимовыгодном
и долгосрочном сотрудничестве.*